2012 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

个 人 赛 试 题

一、填空题

题 号	1	2	3	4
答 案	**1**	**398**	**7973**	**2012**
题 号	5	6	7	8
答 案	**13**	**56**	**1156,1225,1369，1444,4489,6889**	$28\underbrace{99\cdots9}_{24}$

二、**解** 设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则

$$|AB|^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2=2(x_2-x_1)^2,$$

$$|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|.$$

利用图形计算器，可得 $x_1\approx 1.22492983,\ x_2\approx 3.55787688$，所以

$$|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|=\sqrt{2}|3.55787688-1.22492983|$$

$$\approx 3.29$$

三、**解** 由图像 1 知，函数 $y=f(x)$ 的解析式是 $y=\big||x|-2\big|$.

由图像 2 知，函数的解析式是

$$y=-4\big||x-2|-1\big|+4=-2\big||2x-4|-2\big|+4$$

$$=-2f(2x-4)+4,$$

或者 $$y=-4\big||x-2|-1\big|+4=-2\big||-2x+4|-2\big|+4$$

$$=-2f(-2x+4)+4.$$

所以，$a=-2, b=2, c=-4, d=4$，或者 $a=-2,b=-2,c=4,d=4$.

四、**证**　由题设条件可得

$$7m^2 \geq n^2 + 1.$$

对于整数 x，有 $x^2 \equiv 0,1,2,4 \pmod 7$，所以 $7m^2 \neq n^2 + 1$（否则，$n^2 \equiv 6 \pmod 7$），$7m^2 \neq n^2 + 2$（否则，$n^2 \equiv 5 \pmod 7$），故

$$7m^2 \geq n^2 + 3,$$

于是
$$7 \geq \frac{n^2}{m^2} + \frac{3}{m^2} = \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{mn}\right)^2 + \frac{n^2 - 1}{m^2 n^2}$$
$$\geq \left(\frac{n}{m} + \frac{1}{mn}\right)^2,$$

故
$$\sqrt{7} \geq \frac{n}{m} + \frac{1}{mn}.$$

2012 年上海市 T I 杯高二年级数学竞赛答案

团体赛试题答案

一、解 设

$$150=a+(a+1)+\cdots+(a+k),$$

其中 a，k 都是正整数，于是

$$(2a+k)(k+1)=300=2^2\cdot 3\cdot 5^2.$$

因为 $(2a+k)+(k+1)=2a+2k+1$ 是奇数，所以 $2a+k$ 与 $k+1$ 为一奇一偶，且 $2a+k>k+1>1$，所以

$$\begin{cases}k+1=3,\\2a+k=2^2\cdot5^2,\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=5,\\2a+k=2^2\cdot3\cdot5,\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=3\cdot5,\\2a+k=2^2\cdot5,\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=2^2,\\2a+k=3\cdot5^2,\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=2^2\cdot3,\\2a+k=5^2,\end{cases}$$

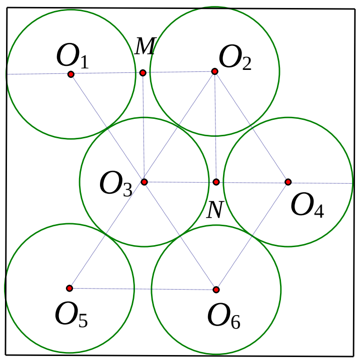
解得

$$(a,\ k)=(49,\ 2),\ (28,\ 4),\ (3,\ 14),\ (36,\ 3),\ (7,\ 11).$$

所以，共有 5 种不同的方式.

二、**解** 将 6 个等圆按如图所示的方法放置，注意到四边形 $O_2O_3O_6O_4$ 是菱形，作 $O_3M\perp O_1O_2$ 于点 M，$O_2N\perp O_3O_4$ 于点 N，设 $\angle O_1O_3M=\alpha$，则有

$$\begin{cases}2\times 2r\cos\alpha+2r=1,\\3\times 2r\sin\alpha+2r=1,\end{cases}$$



所以
$$\begin{cases}2r\cos\alpha=\dfrac{1-2r}{2},\\[2mm]2r\sin\alpha=\dfrac{1-2r}{3},\end{cases}$$

消去 α，得
$$4r^2=\left(\frac{1-2r}{2}\right)^2+\left(\frac{1-2r}{3}\right)^2,$$

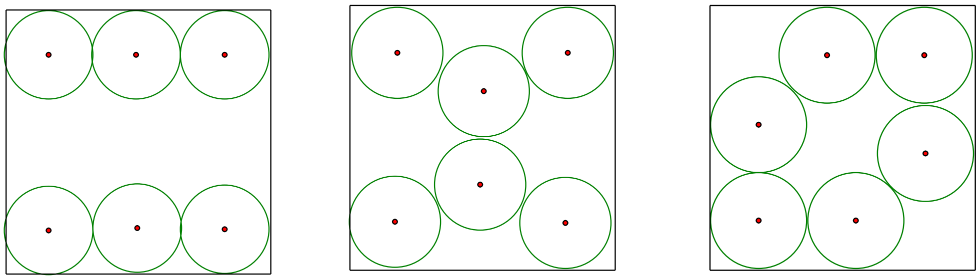
即
$$92r^2+52r-13=0,$$

解得
$$r=\frac{-13+6\sqrt{13}}{46}\approx 0.187680$$（负的已舍去）.

所以，按如图所示的放置，可以使得 $r\ge 0.18768$.

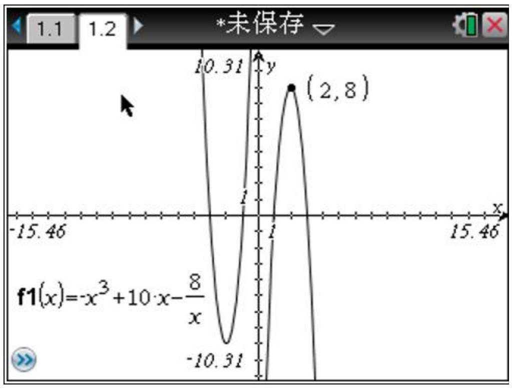
注：6 个等圆如果按如下方式放置，那么他们的半径分别为

$r=0.1667$， $r=\quad 0.1771$，$r=\qquad$.



三、**解** 显然，$x=0$ 不满足方程，所以方程可化为：$-x^3+10x-\dfrac{8}{x}=a$.

用图形计算器作函数 $f(x)=-x^3+10x-\dfrac{8}{x}$ 的图像如图所示，用计算器求解可以发现:当 $x>0$ 时，函数有极大值 $f(2)=8$；当 $x<0$ 时，有极小值 $f(-2)=-8$.



所以当实数 a 满足条件 $a\in(-8,8)$ 时，方程有且只有四个实数解.

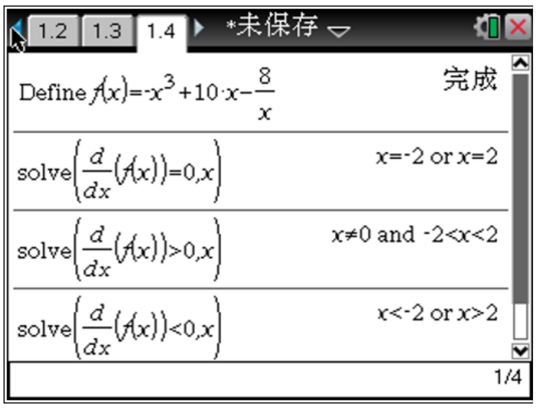
下面证明上述结论如下:

$$f'(x)=-3x^2+\frac{8}{x^2}+10,$$

当 $x=2$ 或 $x=-2$ 时， $f'(x)=0$；

当 $x\in(-2,0)\cup(0,2)$ 时， $f'(x)>0$；

当 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 时， $f'(x)<0$.



所以函数在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,0)$ 上单调递增，而 $f(-2)=-8$ 有极小值 -8；函数在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，而 $f(2)=8$ 有极大值 8.

所以方程在 $a\in(-8,8)$ 时，方程有且只有四个实数解.