利用TI图形计算器绘制美丽的极坐标曲线

规定有单位长度的射线 Ox，O 为极点，Ox 为极轴，这样就建立了极坐标系. 又把平面上一点 P 到极点 O 的距离称为极径 ρ，OP 与 Ox 轴的夹角 θ 称为极角，于是得到点 P 的极坐标为 $P(\rho,\theta)$. 在这些概念的基础上，可得到常见曲线的极坐标方程，如下：

（1）过极点倾斜角为 α 的直线：$\theta=\alpha\ (\rho\in R)$ 或写成 $\theta=\alpha$ 及 $\theta=\alpha+\pi$；

（2）过 $A(a,\alpha)$ 垂直于极轴的直线：$\rho\cdot\cos\theta=a\cos\alpha$；

（3）以极点 O 为圆心，a 为半径的圆 $(a>0)$：$\rho=a$；

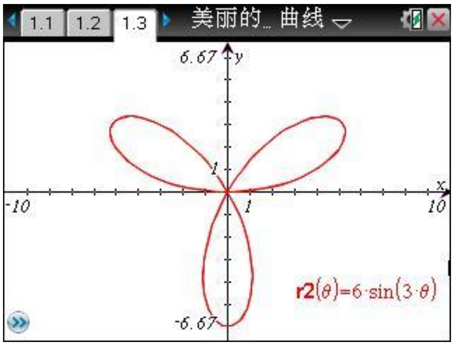
（4）若 $O(0,0)$，$A(2a,0)$，以 OA 为直径的圆 $(a>0)$: $\rho=2a\cos\theta$.

然而，极坐标系下的曲线远不只是这些，还有更为美丽漂亮的极坐标曲线，下面我们借助 TI-Nspire™ CX CAS 图形计算器，对几类常见的极坐标曲线进行绘制与赏析.

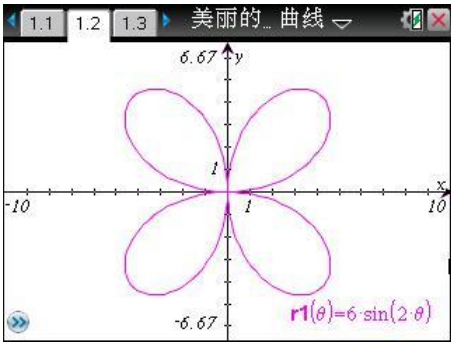
一、玫瑰线

玫瑰线(polar rose)是数学曲线中非常著名的曲线，看上去像花瓣，它只能用极坐标方程来描述，方程为：$r(\theta)=a\bullet\cos k\theta$ 或 $r(\theta)=a\bullet\sin k\theta$，其中 k 是整数，常量 a 代表玫瑰线花瓣的长度. 当 k 是奇数时，曲线有 k 个花瓣；当 k 是偶数时，曲线有 $2k$ 个花瓣.

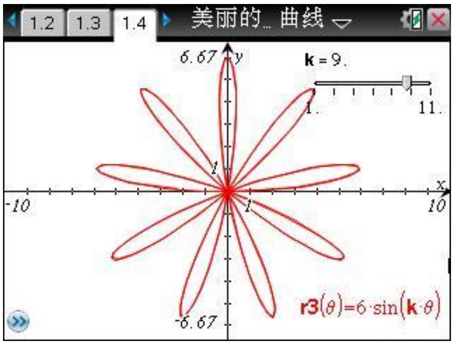
我们作出几例玫瑰线如下：



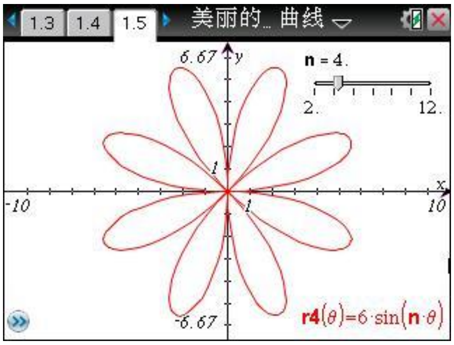
(1)三叶玫瑰线 $r(\theta)=6\bullet\sin 3\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$



(2)四叶玫瑰线 $r(\theta)=6\bullet\sin 2\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$



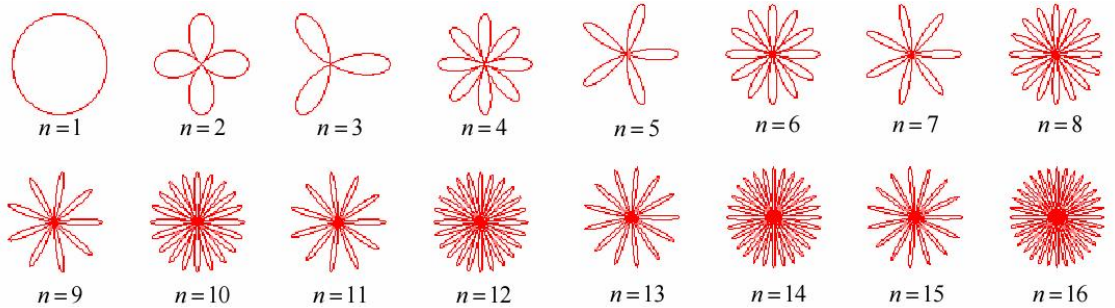
(3)k 叶玫瑰 $r(\theta)=6\bullet\sin k\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$,$k$ 奇



(4)$2k$ 叶玫瑰 $r(\theta)=6\bullet\sin k\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$,$k$ 偶

操作提示：按 ctrl doc 2 添加图形页，再按 menu 3 3 选择极坐标作图，按 ctrl G 可显示或隐藏输入栏，按 π 选择常数 π；按 menu 1 A 可插入游标，用 [手形] 键拖动其位置，按 ctrl menu 1 能对游标进行设置.

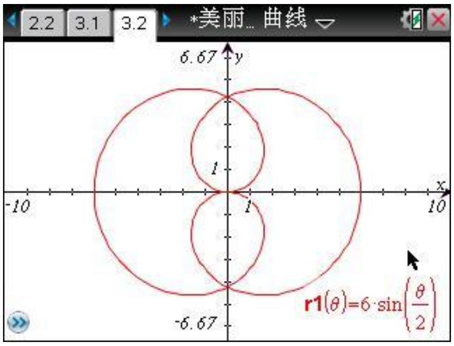
进一步作出 $r(\theta)=a\bullet\cos n\theta$ 的各种情形如下：



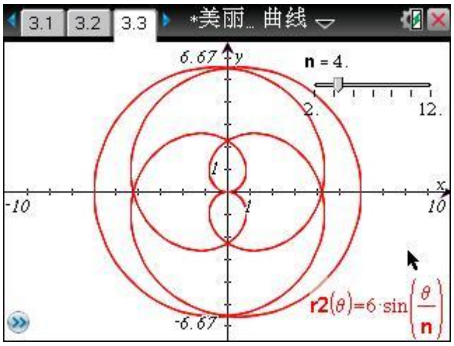
二、圆盘线

玫瑰线的极坐标方程 $r(\theta)=a\bullet\cos k\theta$ 或 $r(\theta)=a\bullet\sin k\theta$ 中，如果 k 为非整数，将产生圆盘(disc)状图形，且花瓣数也为非整数.

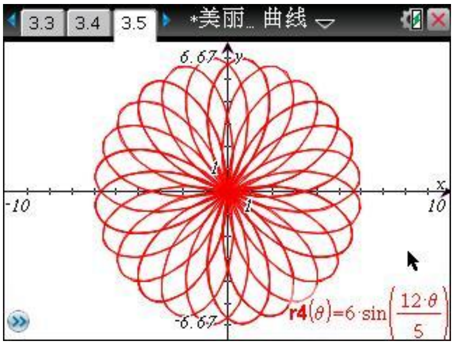
我们作出几例圆盘线如下：



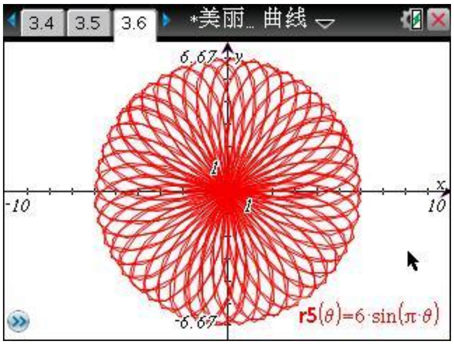
(1) $r(\theta)=6\bullet\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\theta\in[0,4\pi]$



(2) $r(\theta)=6\bullet\sin\dfrac{\theta}{n}$, $\theta\in[0,24\pi]$



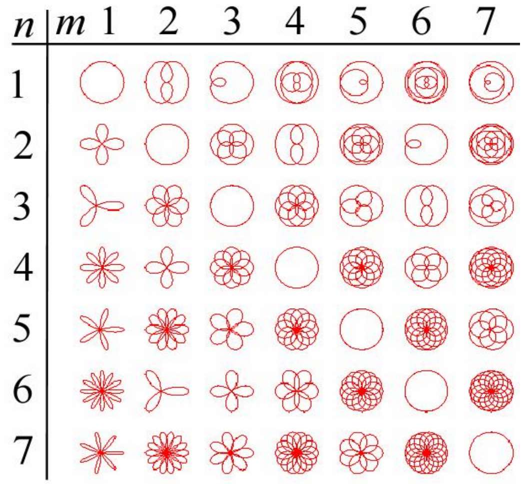
(3) $r(\theta)=6\bullet\sin\dfrac{12\theta}{5}$, $\theta\in[0,10\pi]$

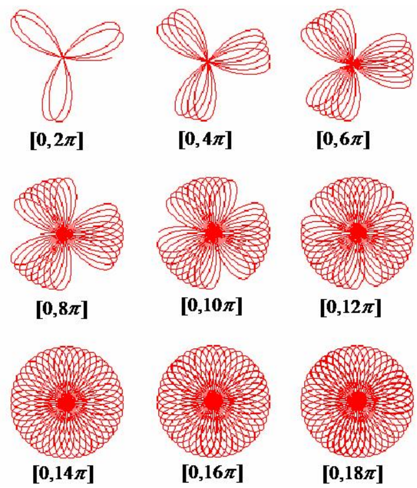


(4) $r(\theta)=6\bullet\sin\pi\theta$, $\theta\in[0,30\pi]$,

操作提示：按 ctrl doc▾ 2 添加图形页，再按 menu 3 3 选择极坐标作图，按 ctrl G 可显示或隐藏输入栏，按 π▸ 选择常数 π；按 menu 1 A 可插入游标，用 键拖动其位置，按 ctrl menu 1 能对游标进行设置；按 ctrl ÷ 调用分式符号.

进一步作出 $r(\theta)=\cos\dfrac{n\theta}{m}$ 及 $r(\theta)=6\bullet\sin\pi\theta$ 的各种情形如下：





(1) $r(\theta)=\cos\dfrac{n\theta}{m}$

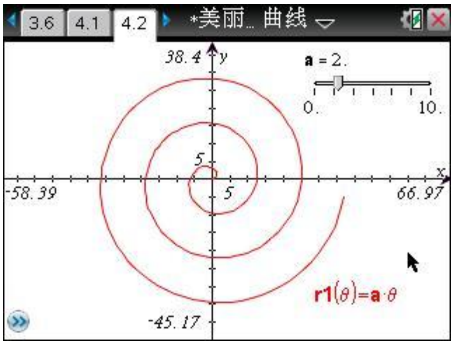
(2) $r(\theta)=6\bullet\sin\pi\theta,\ \theta$ 在以上各区间

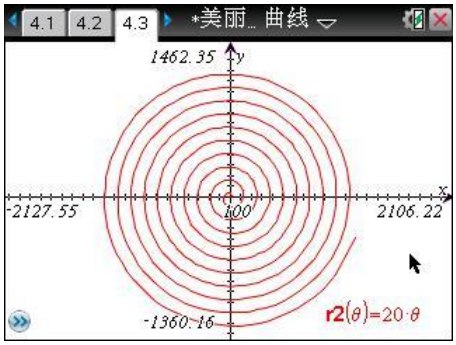
三、螺线

螺线即螺旋线，它可以这样定义：在平面极坐标系中，如果极径 ρ 随极角 θ 的增加而成比例增加（或减少），这样的动点所形成的轨迹叫做螺线. 螺线也可以理解为由两种运动形成. 设想一个虫子站在匀速旋转的圆盘之上，从圆心沿某个半径向外爬行，它的影子会在天花板上绘出一条螺线. 螺线在实际生产中有一些应用，例如有些凸轮的轮廓线和三爪卡盘的轨线都是等速螺线；对数螺线在刀具的设计，航行导向等方面，也有它重要的应用. 螺线有许多中，下面研究常见几种.

1. 阿基米德螺线.

阿基米德螺线又称“等速螺线”. 当一点 P 沿动射线 OP 用速度 v 做等速率直线运动的同时，这条射线又以等角速度 ω 绕点 O 旋转，点 P 的轨迹称为“阿基米德螺线”，其极坐标表示式是：$r(\theta)=a\theta$，这里 a 为实数. 阿基米德螺线在极坐标中通用方程形式是：$r(\theta)=a+b\theta$，改变参数 a 将改变螺线形状，b 控制螺线间距离，通常其为常量.





(1) $r(\theta)=a\bullet\theta,\ \theta\in[0,6\pi]$

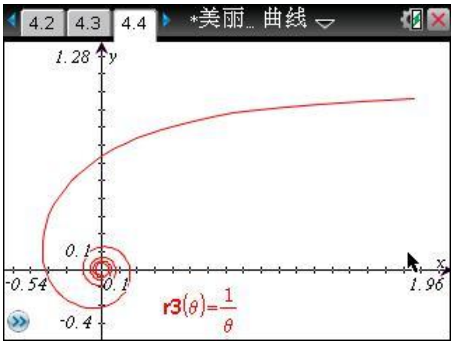
(2) $r(\theta)=20\bullet\theta,\ \theta\in[0,20\pi]$

2. 渐开螺线.

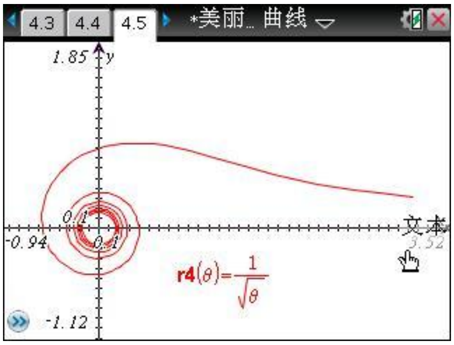
渐开螺线也有许多，例如：双曲螺线，又称倒数螺线，方程形式为 $r(\theta)=\dfrac{a}{\theta}$，其中 a 为常数，它是极径与极角成反比的点的轨迹，图像的特征是有一条平行于极轴的渐

近线；连锁螺线，又称平方倒数螺线，方程形式为 $r(\theta)=\dfrac{a}{\sqrt{\theta}}$，其中 a 为常数；等角螺线，又称对数螺线，方程形式为 $r(\theta)=e^{a\cdot\theta}$，其中 a 为常数.

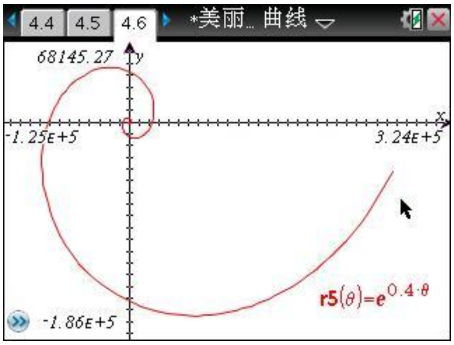
我们作出几例渐开螺线如下：



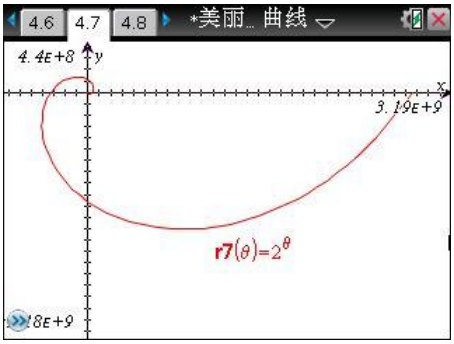
（1）双曲螺线 $r(\theta)=\dfrac{1}{\theta}$，$\theta\in[0.5,30]$



（2）连锁螺线 $r(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}$，$\theta\in[0.1,40]$



（3）等角螺线 $r(\theta)=e^{0.4\theta}$，$\theta\in[0,10\pi]$

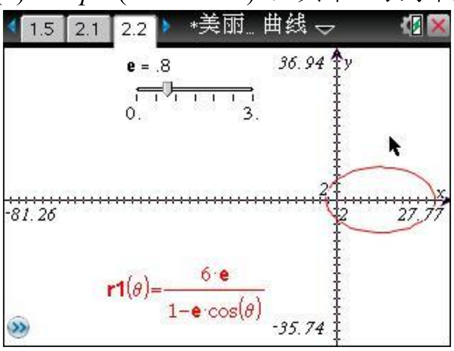


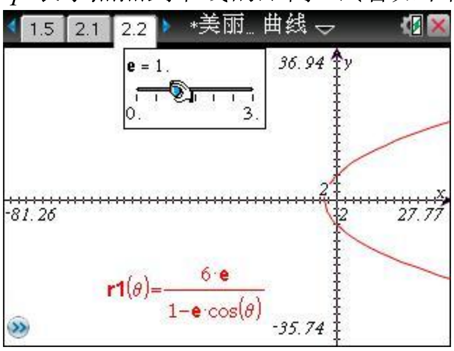
（4）等角螺线 $r(\theta)=2^{\theta}$，$\theta\in[0,10\pi]$

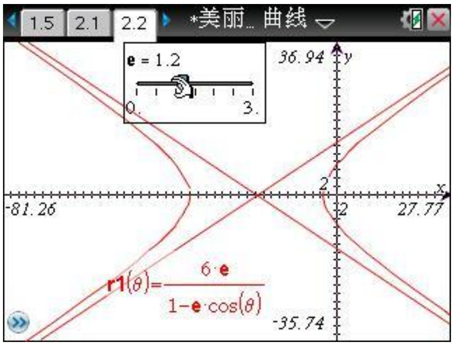
操作提示：按 ctrl doc▾ 2 添加图形页，再按 menu 3 3 选择极坐标作图，按 ctrl G 可显示或隐藏输入栏；按 menu 4 A 选择适合窗口或按 menu 4 再选择其它窗口模式. 等角螺线中，e 不是自然科学常数，而是离心率，所以不能按 π▾ 键得到，而需要按字母键 E.

四、圆锥曲线

圆锥曲线方程如下：$r(\theta)=1/(1-e*cos\theta)$ ，其中 1 表示半径，e 表示离心率. 如果 $e<1$，曲线为椭圆；如果 $e=1$，曲线为抛物线；如果 $e>1$，则表示双曲线. 方程形式也可以为 $r(\theta)=e*p/(1-e*cos\theta)$ ，其中 e 表示离心率，p 表示焦点到准线的距离. 试看如下图：



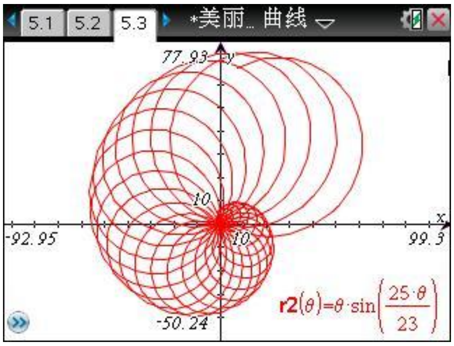




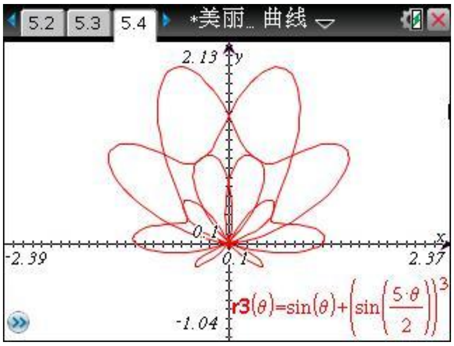
操作提示： 用 键选择游标，指针变，按 ctrl menu 1 对游标设置，步长设为 0.2.

五、其它曲线

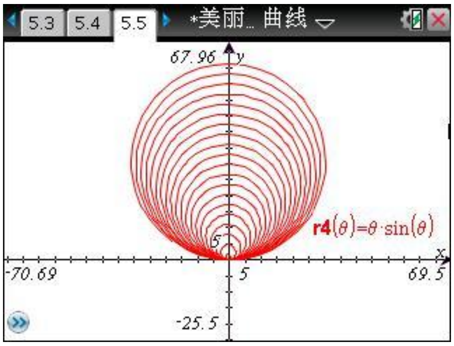
漂亮的极坐标曲线还有许多，我们多尝试，必然会有层出不穷的发现. 赏析几例如下：



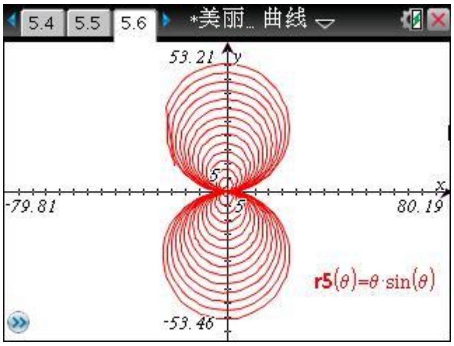
（1）钉螺线 $r(\theta)=\theta \bullet \sin\dfrac{25\theta}{23}$，$\theta \in [0,80]$



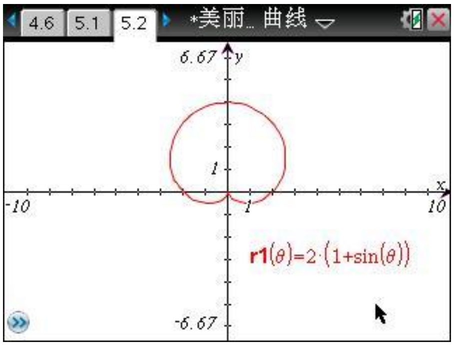
（2）莲花线 $r(\theta)=\sin\theta+\sin^3\dfrac{5\theta}{2}$，$\theta \in [0,4\pi]$



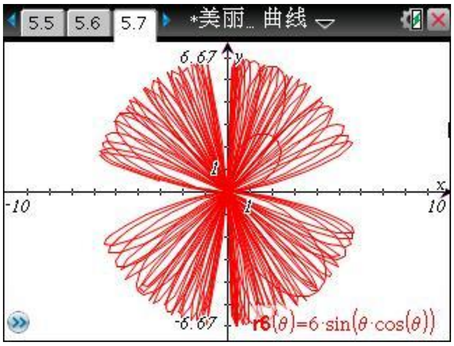
（3）单页贝壳线 $r(\theta)=\theta \bullet \sin\theta$，$\theta \in [0,20\pi]$



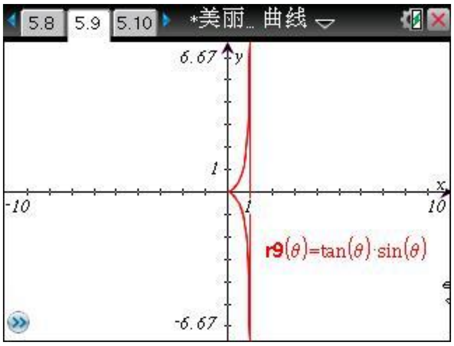
（4）双页贝壳线 $r(\theta)=\theta \bullet \sin\theta$，$\theta \in [-15\pi,15\pi]$

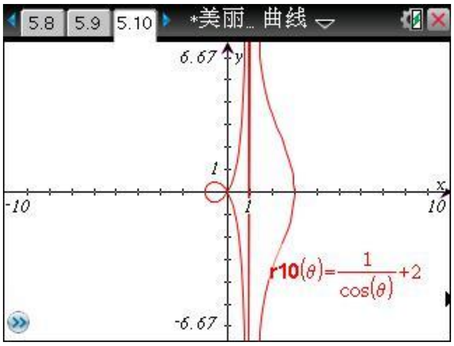


（5）心形线 $r(\theta)=2(1+\sin\theta)$，$\theta \in [0,2\pi]$

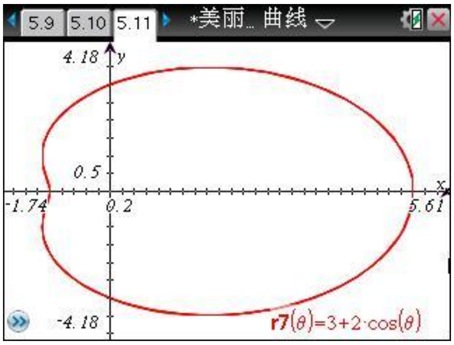


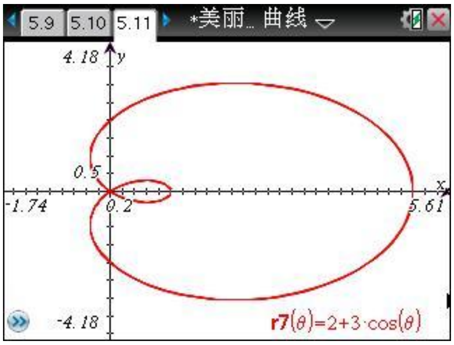
（6）$r(\theta)=6\sin(\theta \bullet \cos\theta)$，$\theta \in [0,10\pi]$



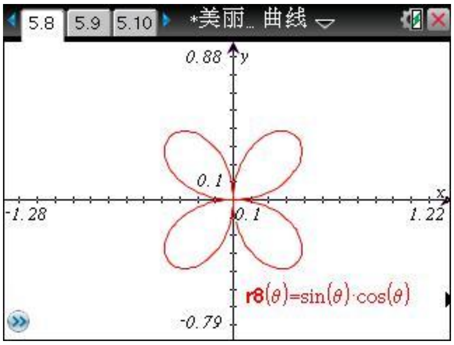


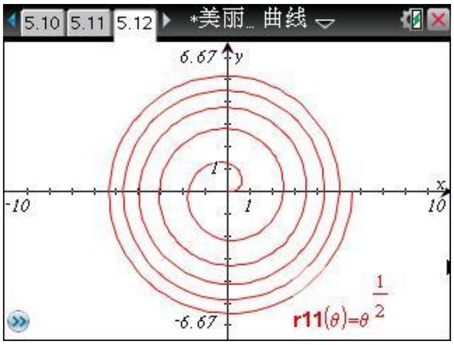
(7) 蔓叶线 $r(\theta)=\tan\theta\text{•}\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$　　(8) 蚌线 $r(\theta)=\dfrac{1}{\cos\theta}+2,\ \theta\in[0,2\pi]$





(9) 蜗线 $r(\theta)=3+2\cos\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$　　(10) 钳线 $r(\theta)=2+3\cos\theta),\ \theta\in[0,2\pi]$





(11) 四叶草线 $r(\theta)=\sin\theta\text{•}\cos\theta,\ \theta\in[0,2\pi]$　　(12) 费马螺线 $r(\theta)=\theta^{\frac{1}{2}},\ \theta\in[0,10\pi]$

操作提示： 用键选择图像，指针变，按 ctrl menu 6 可修改曲线方程.

小结语：

高中数学学习阶段，对极坐标的学习要求比较低，仅限于掌握极坐标与直角坐标的互化，掌握简单曲线（直线、圆）的极坐标方程. 笔者在此用 TI 图形计算器，绘制了各种漂亮的极坐标曲线，体现了数学之美，也激发同学们升入大学进一步深入学习与研究.

（作者：高建彪　邮箱:dsgjb@163.com，QQ:76456245　2011 年 5 月 28 日完稿于中山市东升高中）

*****如果您发现了更为漂亮的极坐标曲线，敬请将其方程形式发至邮箱，谢谢您的支持.******