三次函数的根与系数的关系

北京市第十九中学数学教师　　王玉生　　2011 年 7 月 5 日

今年在上海开会时，TI 公司的 Koen　Stulens 教授在介绍使用 TI-*nspire cx* CAS 图形计算器探索三次函数的性质时，利用几个例题，引导大家思考三次函数根与系数的关系，最后没有给出明确的结论和证明过程，这大概是典型的美国教学方式，下面我按中国数学教师的思维方式，说明一下这个问题，希望能对我们数学同行有所帮助.

对于二次函数根与系数的关系，即韦达定理，我们中国的数学教师是非常熟悉的．设 $f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a、b、$c\in\mathrm{R}$ 且 $a\neq 0$，若 x_1、x_2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根，则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$．需要指出的是，当 x_1、x_2 为方程的虚数根时，韦达定理也是成立的，将 $ax^2+bx+c=0$ 化为 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$，令 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$，即证明了对于任何复数根 x_1、x_2，定理成立.

根据代数基本定理，在复数域内，n 次代数方程有且只有 n 个根；另外，对任意实系数的多项式方程 $f(x)=0$，其虚数根是成对出现的，且互为共轭复数．所以三次方程必有三个复数根，它们可能是三个实根，也可能是一个实根和两个成共轭复数的虚数根．当有三个实根时，可能是有三个相等的实根，也可能是有两个相等的实根．同二次函数一样，对三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、$d\in\mathrm{R}$ 且 $a\neq 0$，若 x_1、x_2、x_3 为方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个复数根，则它们也是方程 $x^3+\dfrac{b}{a}x^2+\dfrac{c}{a}x+\dfrac{d}{a}=0$ 的根，由关于多项式根的定理，有

$$\begin{aligned}x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}&=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\&=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3,\end{aligned}$$

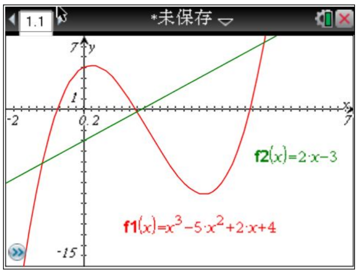
所以 $x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}$.

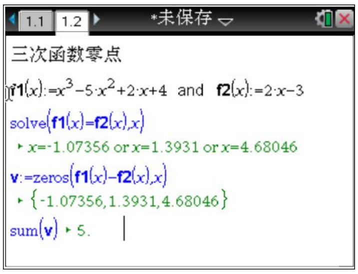
下面分析 Koen　Stulens 教授介绍的几个例题.

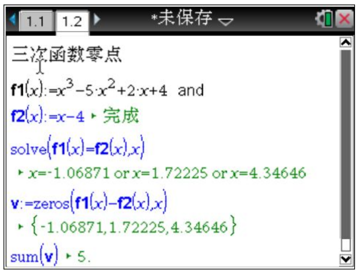
例 1　讨论函数 $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ 与 $g(x)=2x-3$ 的交点.

原题是用计算器分别画出函数 $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ 与 $g(x)=2x-3$ 的图象，再求出交点横坐标之和为 5; 然后在 $g(x)=px+q$ 取不同的 p、q 值，探索发

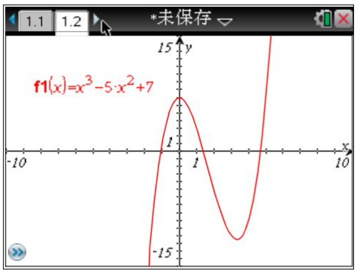
现交点横坐标之和仍然为 5，如下图所示.

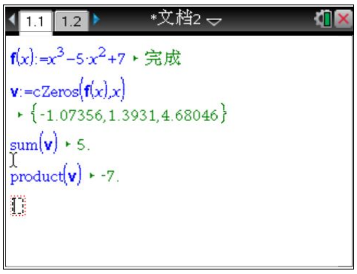






说明：　实际上可以令 $x^3-5x^2+2x+4=2x-3$，转化为讨论方程 $x^3-5x^2+7=0$ 的根，由函数图象知有三个实根 x_1、x_2 和 x_3，利用计算器计算，可知 $x_1+x_2+x_3=5$，$x_1x_2x_3=-7$.



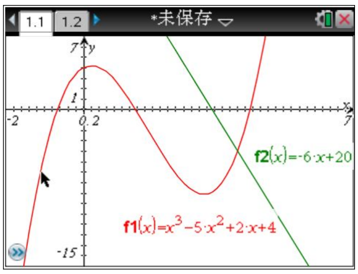


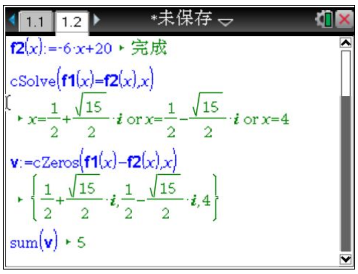
.

两种解法基本相同，但是由后一种方法可以看出，由于 $g(x)=px+q$ 取不同的 p、q 值时，并不改变三次函数中 x^2 的系数，所以根的和不变，并且容易看出根的乘积与方程常数项的关系.

例 2　讨论函数 $f(x)=x^3-5x^2+2x+4$ 与 $g(x)=-6x+20$ 的交点.

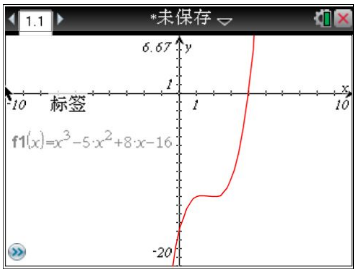
原题的解法同例 1 基本一样，区别在于，求出了方程的所有复数根，提示了问题的结论是对方程所有的复数根才成立的.

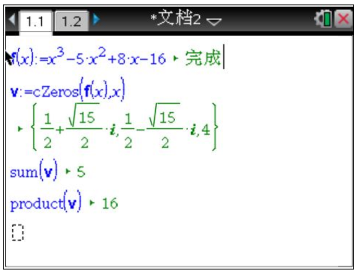


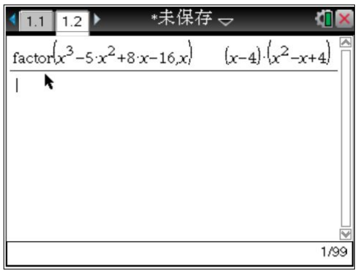


说明：　可以令 $x^3-5x^2+2x+4=-6x+20$，转化为求方程 $x^3-5x^2+8x-16=0$ 的根. 如下图所示，三次函数 $y=x^3-5x^2+8x-16$ 有一个实根和两个共轭的虚数根，三个根的和为 5，积为 16. 分解因式可知，两个共轭的虚数根 $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i$ 是

方程 $x^2-x+4=0$ 的根.



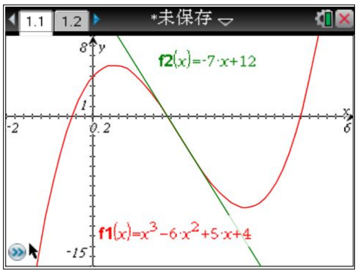


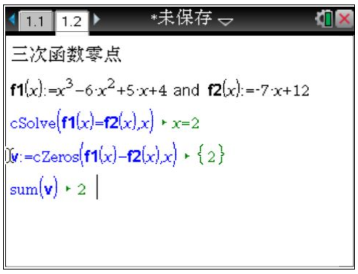


后一种方法通过因式分解，揭示了三次方程有三个复数根的原因.

例 3　讨论函数 $f(x)=x^3-6x^2+5x+4$ 与 $g(x)=-7x+12$ 的交点.

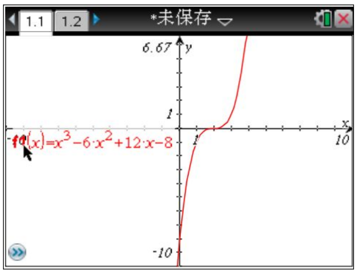
原题解法如下图所示，并提出问题：为什么交点和不是 6?

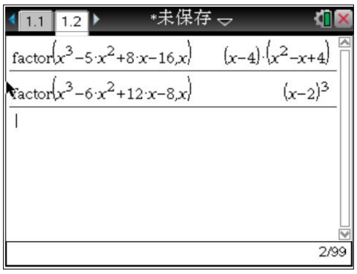


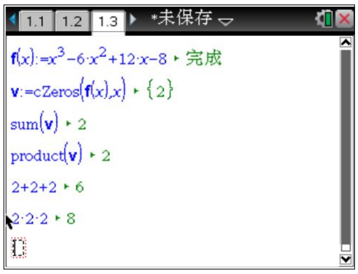


说明：　令 $x^3-6x^2+5x+4=-7x+12$，转化为求方程 $x^3-6x^2+12x-8=0$ 的根.

如下图所示，似乎三次函数 $y=x^3-6x^2+12x-8$ 只有一个实根 $x=2$，但分解因式 $x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$，所以 $x=2$ 是方程的三重根，即方程有三个相等的实根 $x_1=x_2=x_3=2$，因而 $x_1+x_2+x_3=6$，$x_1x_2x_3=8$，符合前面推出的根与系数的结论. 由于集合中的元素必须是互异的，而计算器表示出的是方程的解集，不能表示出方程的等根，所以需要分解因式，确定是几重根.



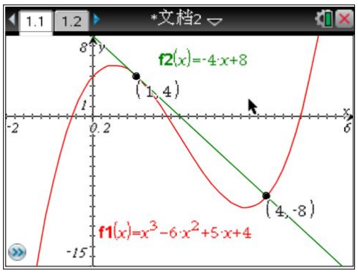


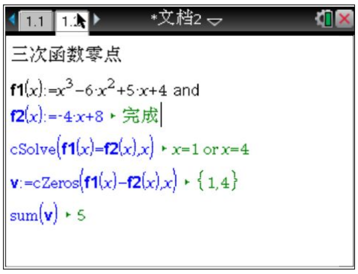


后一种方法可以揭示出 $x=2$ 是方程的三重根，从而发现产生问题的原因.

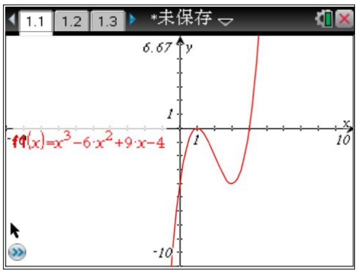
例4　讨论函数 $f(x)=x^3-6x^2+5x+4$ 与 $g(x)=-4x+8$ 的交点.

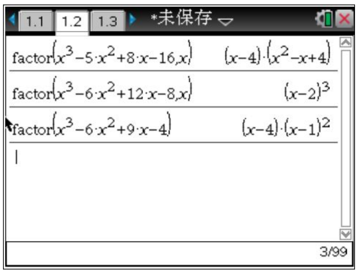
原题解法如下图所示，并提出了问题，如何解释计算的结果? 能得到什么结论?

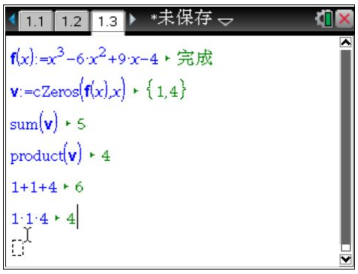




说明：令 $x^3-6x^2+5x+4=-4x+8$，转化为求方程 $x^3-6x^2+9x-4=0$ 的根．如下图所示，三次函数 $y=x^3-6x^2+9x-4$ 有三个实根 $x_1=x_2=1, x_3=4$，其中 1 是方程的二重根，所以 $x_1+x_2+x_3=6$， $x_1x_2x_3=4$，仍然符合前面推出的结论.







从前面的分析说明可以看出，讨论三次函数与一次函数图象交点横坐标的性质时，将两个方程联立，化为一个标准的三次方程，考虑到它所有的复数根和根的重数，则可以看出所有根的和、积与系数的关系.

一般地，对于实系数的 $n\,(n=2,3,4\cdots)$ 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$，设 x_1、x_2、…、x_n 为它的 n 个复数根，其中 $k(k\in N^*)$ 次根看成是 k 个相等的根，由 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

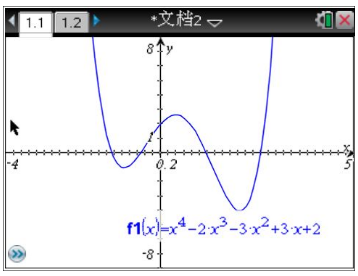
$=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n$，则有 $x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1$，

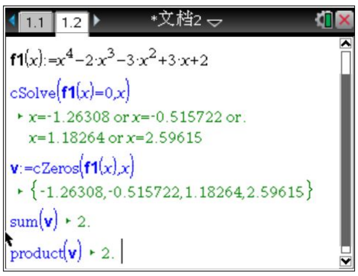
$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n a_n$.

例 5　验证四次方程 $x^4-2x^3-3x^2+5x-3=2x-5$ 解之和是否符合结论.

说明：化为 $x^4-2x^3-3x^2+3x+2=0$，如下图所示，有

$x_1+x_2+x_3+x_4=-a_1=2$，$x_1x_2x_3x_4=(-1)^4a_4=2$，符合结论.





参考文献：　数学手册，人民教育出版社，1979，北京.
注：本文所用计算器为 TI-*nspire*　*cx*　CAS 中文彩屏.
E-mail:　wangyusheng1947@126.com