蒙提霍尔问题的故事

蒙提霍尔问题（Monty Hall problem），亦称蒙提霍尔悖论，出自美国电视游戏节目Let's Make a Deal，问题名字来自于该节目主持人蒙提•霍尔（Monty Hall）.

游戏形式：三扇门，一扇门后是汽车，两扇门后是山羊，选中汽车即赢得汽车.竞猜者先选定一扇门，主持人开启剩下两扇门中的一扇山羊门，询问竞猜者要不要换另一扇门.

游戏中，主持人知道每扇门后的情况，透露一扇山羊门，询问竞猜者是否换门，增加了节目的刺激性.

1990年，《展示杂志》（Parade Magazine）玛丽莲•沃斯•莎凡特（Marilyn vos Savant）专栏回答换门会更有优势，这在美国引起了争议，人们寄来了数千封抱怨信，很多寄信人是科学老师或学者.佛罗里达大学的一读者写道："这个国家已经有够多的数学文盲了，我们不想再有个世界上智商最高的人来充数！真让人羞愧！"

问题：换门、不换门，赢得汽车的概率各是多少?

电子表格模拟

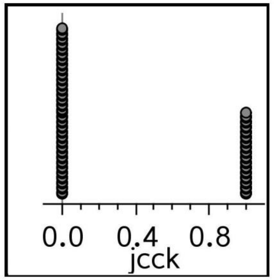
A列，qcmh (汽车门号)，表示汽车所在门，randint产生1～3随机数；
B列，jcck (竞猜窗口)，设竞猜门为1号，若qcmh=1则赢汽车，赋值1；
C列，zcck (主持窗口)，主持人始终揭开山羊门，设为2号，赋值0;
D列，hmck (换门窗口)，设所换门为3号，若qcmh≠1则赢汽车，赋值1.
注：randint()，产生随机整数；iffn()，条件赋值函数.

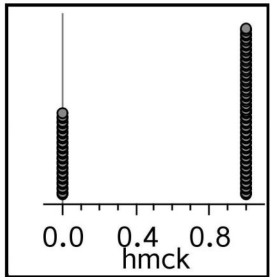
	A qcmh	B jcck	C zcck	D hmck	E
◆	=randint(1,3,100)	=iffn(qcmh=1,1,0)	=seqn(0,	=iffn(qcmh≠1,1,0)	
1	3	1	0	0	
2	3	0	0	1	
3	1	0	0	1	
4	2	0	0	1	
5	2	0	0	1	
6	3	0	0	1	
7	1	0	0	1	

A1 =3

1		0.33		0.67

A1

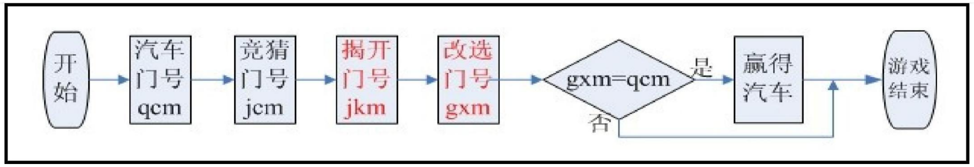




模拟实验结论:

换门，赢得汽车机会将加倍！

模拟程序框图



蒙提霍尔问题模拟实验与拓展研究

TI-BASIC模拟程序

sm(3000)

不换门，赢得汽车频率0.324667

换门，赢得汽车频率0.675333

完成

1/3

sm 3/23

```
Define sm(n)=
Prgm
cs:={0,0}
For i,1,n
  qcm:=randInt(1,3):  jcm:=randInt(1,3)
  jkm:={ }
  For j,1,3
    If j≠qcm and j≠jcm Then
```

数学解答

当竞猜者不换门时，赢得汽车的概率为1/3 .

当竞猜者换门时，有如下可能情况:

① 竞猜者选山羊1号，主持人开山羊2号，换门赢得汽车，概率1/3;

② 竞猜者选山羊2号，主持人开山羊1号，换门赢得汽车，概率1/3;

③ 竞猜者选汽车，主持人开山羊1号或2号，换门将失败，概率1/3 .

以上三种情况，概率均为1/3，所以换门赢得汽车的概率为2/3.

从而问题的答案是：换门，赢得汽车的机会将会加倍.

最简单的解释：当竞猜者换门时，赢得汽车的唯一可能性是先选一扇山羊门，主持人开启另一扇山羊门，换门赢得汽车，所以概率为2/3.

蒙提霍尔问题模拟实验与拓展研究

问题拓展

拓展1：有4扇门，1扇门后是汽车，其余都是山羊，竞猜者初始选择一扇门，主持人依据该选择，开启2扇山羊门后，询问竞猜者是否换门，那么换门策略下赢得汽车的概率是多少？

车频率0.235

换门，赢得汽车频率0.765

完成

sm(2000)

不换门，赢得汽车频率0.272

换门，赢得汽车频率0.728

完成

1/2

sm 16/31

```
EndIf
gxm:={ }
For j,1,4
  If j≠jkm[jkmx[1]] and j≠jkm[jkmx[2]] and j≠jc
    gxm:=augment(gxm,{j})
  EndIf
EndFor
gxmx:=randInt(1,count(gxm))
gxms:=gxm[gxmx]
If qcm=jcm Then
  cs[1]:=cs[1]+1
EndIf
If qcm=gxms Then
```

有4扇门，1扇门后汽车，竞猜者先选一扇门，主持人再开启2扇山羊门，此时有2扇门没有开，竞猜者更换选择.

分析赢得汽车的可能性，必须初始选择山羊门（概率$\frac{3}{4}$），

此时开启2扇山羊门，换门后必然是汽车门，因此概率为$\frac{3}{4}$。

拓展2：有n扇门，1扇门后是汽车，其余都是山羊，竞猜者初始选择一扇门，主持人依据该选择，同时开启m扇山羊门，再询问竞猜者是否换门，那么换门策略下赢得汽车的概率又是多少？

门数	主持揭门	游戏次数	频率
3	1	2000	0.6545
3	1	20000	0.6705
4	2	20000	0.7566
5	3	30000	0.7989
6	4	40000	0.832
6	3	20000	0.4184
6	2	20000	0.2732
6	1	20000	0.2045

有n扇门，1扇门后汽车，竞猜者先选一扇门，主持人再开启m扇山羊门，此时有n−m 扇门没有开，竞猜者更换选择.

分析赢得汽车的可能性，必须初始选择山羊门（概率$\frac{n-1}{n}$），更换选择后选择的是汽车门，也就是开启m扇山羊门后，需要从另外n−m−1扇门中选中其中唯一1扇门后是汽车的门，因此概率为

$$\mathrm{fp}(n,m):=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-m-1}$$

$\mathrm{fp}(4,2)\to\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\mathrm{fp}(5,3)\to\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\mathrm{fp}(6,4)\to\frac{5}{6}$

蒙提霍尔问题模拟实验与拓展研究

拓展3：有n扇门，1扇门后是汽车，其余都是山羊，竞猜者初始选择一扇门，主持人依据该选择，m次开启一扇山羊门，每次都询问竞猜者是否换门，那么每次都换门策略下赢得汽车的概率是多少？

门数	主持揭门	游戏次数	频率
3	1	2000	0.673
3	1	20000	0.6587
4	2	20000	0.6219
5	3	30000	0.6334
6	4	40000	0.6279
6	3	20000	0.3724
6	2	20000	0.2674
6	1	20000	0.2074

尝试计算4扇门，竞猜者先选一扇门，主持人在另外三扇门中，开启其中一扇山羊门，询问一次，竞猜者改选，主持人再开启一扇山羊门，竞猜者再改选.

这种情况下赢得汽车只有两种可能，第一种可能是首先就选中汽车门(1/4)，2次揭门与2次改选之后又回到这扇门；第二种可能是第一次选中山羊门(3/4)，主持人开启1扇山羊门，竞猜者在余下的两扇门中2选1（山羊门），最终才会中奖，所以赢得汽车的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\to\frac{5}{8}$

技术作用：① 模拟实验； ② 验证结果；
③ 发现结论； ④ 算法熏陶.

主讲：高建彪
单位：中山市东升高中
邮箱：76456245@qq.com