

基于 TI 手持教育技术的函数内容的课例研究

上海外国语大学附属大境中学 高虹

我校是上海市二期课改新教材的试点学校，同时也是 TI 手持教育技术的实验基地。在创建“上海市实验性示范性普通高中”中，我们做了很多实实在在的事情。今年的高一，我校一如既往开设 4 个 TI 实验班，但实验班的 TI 拓展课不再由某一位教师独立承担，而是由担任该班级数学教学任务的教师执教。学校要求教师不仅要在 TI 拓展课上用 TI，而且在数学基础课程的教学恰当地使用 TI 技术来支持数学教学。虽说我校已经对全体数学教师进行过 100% 的自培工作，所有的数学教师也都参加过 TI 提高班的培训，但在 TI 辅助数学教学方面，还没有什么经验积累。而课堂教学又是教育改革的重中之重，如何使教师迅速提高专业水平，就成了我们当前急于解决的问题。

基于 TI 手持教育技术的课例研究正是在帮助教师理解新教材、改变教学方式、完善学生学习方式、形成个性风格的背景下产生的。我们在课例研究过程中打破了以往听课、评课的教研形式，而是以自我反思、同伴互助、专业引领三个环节展开实施。首先是一名教师备课上课，其他教师来听课、评课，在评课过程中有对成绩的肯定，也有对存在问题的改进策略。研究中，教师通过分析，肯定成绩，否定不足，不断思考自己与他人的教学，从而扬长避短，各取所需；接下来这名教师围绕本节课再次设计实践，其他教师再次听课、评课。教师们“先实践，再反思，再进行理论升华，再实践”的校本研究中，迅速地提高了自身的教学水平。

一、课例研究的教育理念

上海市二期课改已经走过了三个年头，三年来我校认真领会课改精神、切实可行的贯彻课改精神。《上海市中小学数学课程标准》明确指示：要“加强课程的研究和开发，设计和组织实施学校课程计划”，鼓励学校形成“体现本校特色的学校课程”，强调“改革教学过程，促进学生学习方式的改善”。基于上述考虑，我们着手开展了课例研究，试图贯彻以下几个方面的教育理念：

1、实现课程功能的转变

改变课程过于注重知识传授的倾向，强调积极主动的学习态度，数学教学要引导学生学会学习，学会合作，学会做人，打破传统的基于精英主义思想和升学取向的过于狭窄的课程定位，而关注学生的全人发展、个性发展。

2、关注教师的教学行为变化，改善学生的学习方式

学习方式的改善是以教师教学行为的变化为前提的，教师在教学活动中的行为取向对学生的影响是巨大的，从某种意义上说，这也是素质教育能否推进的关键因素。在数学教学活动中，主张学生“做数学”，教师要组织学生能对教学内容进行操作，将“做”、“想”、“讲”有机结合；教师要关注不同学生的数学需要，鼓励学生学自己的数学，学有用的数学；教师要指导学生反思自己的学习过程，优化学习策略，提高学习效率。

3、加强教学反思，提高教学质量

任何一个教师，不论其教学能力起点如何，都有必要通过多种途径对自己的教学进行反思。教学反思有着其现实的意义。反思的目的在于解决理论与实践脱

节的问题，试图构建理论与实践相结合的桥梁，将反思理论指导实践，融于实践，反过来，通过实践的检验进一步提升理论。教师只有经常的进行教学反思，才能冲破经验的束缚，才能不断对教学诊断、纠错、创新，从而由“操作型”的教师逐渐走向科研合理型教师。

4、促进信息技术与数学学科的课程整合，发挥信息技术在数学教学中的作用

教学活动是借助于一定的手段、工具展开的，每一项新技术的发展都给教学活动提供了新的发展空间。在教学活动中，合理地利用信息技术，可以达到“创新教与学的方式，改变训练手段，提高教学效益”的目的。

二、课例研究的具体做法

我们初步拟定了以下制度，以保障课例研究的顺利进行。

1、充分准备：

课例研究需要对新教材、新课标、新理念有充分的认识。因此要求每位教师认真开展理论学习，认真做好业务笔记。要求每位教师定期上网查询资料，更新观念，扩大视野。

2、保障落实：

数学教学上由具有 30 年教学经验的郎贵华老师把关，TI 技术上则由市 TI 主讲教师高虹作顾问，再加上高一备课组四位直接参与 TI 实验工作的教师（1~4 班的数学任课教师），我们六人形成了 TI 教学研究小组，固定单周周三下午两节课后，组内进行一次研究活动，组长做好考勤记录。学校分管领导则定期走入课堂，走近学生，对 TI 教学校本教研工作进行实际调研。

3、规范过程：

规范课例研究的研究过程：定课题——研究教材、学生情况及资源分析——撰写教案——组内研讨——上课——反思、组内研讨——再上课——再反思、组内研讨——……直至满意。

4、建立档案：

建立“TI 手持教育技术支持下的课例研究”的档案，将研究的过程资料留存。

5、及时反馈改进：

人总是在不断的反思中进步的。为了吸取经验，总结教训，参与 TI 实验工作的教师要经常性反思，对比性反思，提出新的问题，找到新的研究方向。

6、及时评价：

每半学期进行一次组内的评价反馈，邀请组内其他不直接参加 TI 实验工作的教师听课、评课。“开放课堂，带走满意，留下建议。”

三、课堂再现

我们研究小组围绕课例研究开展了很多活动，有失败的课例也有成功的课例，有令人遗憾的课例也有令人深思的课例，但在这个过程中，教师的教学理念在逐渐转变，教学行为在逐步改善，教学方式更加丰富多样。下面就以一节高一的课为例，汇报我们的研究过程。

课题的名称是《指数函数及其反函数图象的公共点》，我们研究小组的成员

都上过一至两遍的课，每次上完课，我们小组都会进行研讨、反思、改进，然后再实践、再反思，如此这般循环了数次，每次研讨都有收获。这里，我们记录了几个典型的课例，借此展现我们的研究过程。

下面是我们课题小组对相同的上课环节采取不同的上课方式的课堂跟踪和教师的研讨反思。

教学环节 1：课堂导入

课例一：

教师：（出示课题）哪位同学能讲讲指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 的公共点情况？

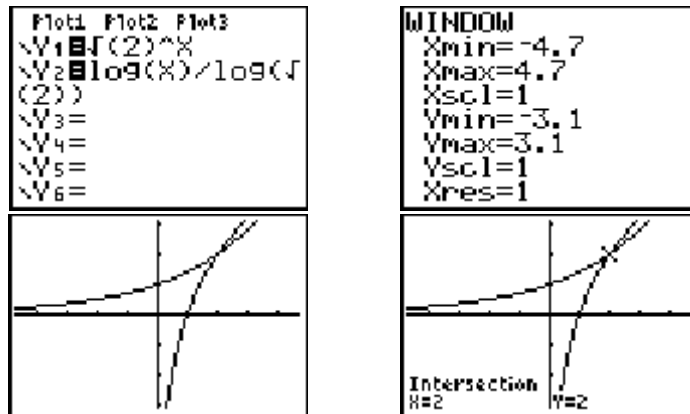
学生：（齐声）当 $a > 1$ 的时候，它们没有公共点；当 $0 < a < 1$ 时，它们有一个公共点。

教师：都是这样认为的吗？有不同看法吗？
（学生沉思、沉默）

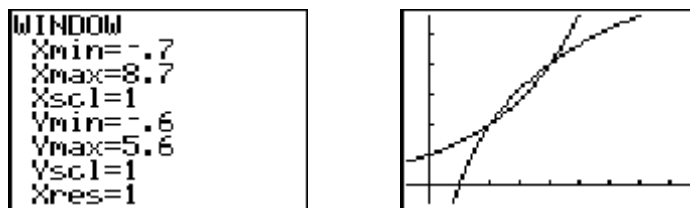
教师：请同学们研究函数 $y = \sqrt{2}^x$ 与 $y = \log_{\sqrt{2}} x$ 的公共点情况。

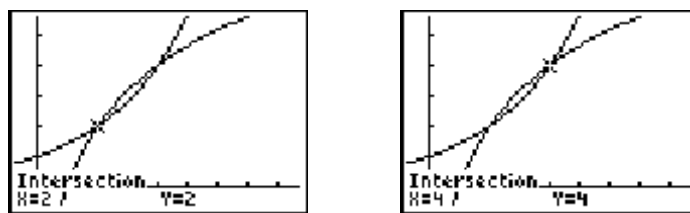
学生 1：（思考片刻）它们有一个公共点 (2,2)。

学生 2：我用 TI 图形计算器作出它们的图象，先在 $\boxed{Y=}$ 中输入函数解析式，然后按 $\boxed{\text{ZOOM}}$ 键选 4，画出对应的函数图象，发现这两个函数的图象有一个公共点，接着按 $\boxed{2\text{nd}}[\text{CALC}]$ ，选 5，求出交点坐标为 (2,2)。



学生 3：不对，根据图象的趋势，应该有两个交点，我也用了 TI，我设置的窗口大小如下，结果是两个交点 (2,2) 和 (4,4)。





教师：很不错！根据同学们的研究，我们可以肯定地说：当 $a > 1$ 的时候，指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 没有公共点的判断是错误的！这节课我

我们就来研究指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 的公共点情况。

教师研讨反思：从课堂的反应情况看，学生的参与欲望不是很强，兴趣也不是很高涨，完全没有达到执教教师的预期效果，也正是这个原因，在一定程度上影响了这节课的效果。课题组研讨反思后认为原因有两个：第一，关注学生学习的最近发展区力度不够。学生在认知水平只是限于“当 $a > 1$ 的时候，它们没有公共点；当 $0 < a < 1$ 时，它们有一个公共点”，他们对此没有异议，教师的问题没有引起大多数同学的共鸣。第二，课堂的引入过于平淡，学生习以为常，学习兴趣没有被最大限度激发！

课例二：

教师：请同学们来看看 2003 年的一道高考题：

在 $P(1,1)$ 、 $Q(1,2)$ 、 $M(2,3)$ 和 $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 四点中，函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

的图象与其反函数的图象的公共点只可能是点 ()

- (A) P (B) Q (C) M (D) N

学生 1：选 A。

教师：为什么呢？

学生 1：如果函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 与其反函数有公共点，那么公共点只可能在直线 $y = x$ 上。

(很多学生频频点头，表示认可。)

教师：是这样吗？有什么不同看法吗？

学生 2：如果选 A，可以计算得 $a = 1$ ，这与条件矛盾，所以不能选 A。

教师：很好！学生 2 的发现很有价值！他通过验算发现了问题。同学们从他的思路中受到什么启发吗？

学生 3：(思考片刻)我也是象学生 2 一样，通过计算发现只有 D 是正确的，此时 $a = \frac{1}{16}$ 。

学生 1：(很肯定的语气)不对！ $N(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ 不在直线 $y = x$ 上。

(学生 1 的话刚落，就引起很多学生的一片议论。)

教师研讨反思：课堂气氛热烈，先是引起学生疑惑：为什么？是考题出错还是教材错了？学生的求知欲望一下子就被激发起来了。教师研讨后认为：这节课

之所以一上来就引起了大多数学生的共鸣，激起了学生的研究欲望，是因为教师将教学内容以问题化的形式组织，激活学生的已有学习经验，促进学生自主探究、合作交流。

对比反思：反思这两个课例，无疑课例 2 更加成功些。课例 1 的引入方式其实也能做到很成功，其欠缺之处在于教师没有给学生充分发表见解的机会，事实证明，学生自己也能发现指数函数与其反函数两个公共点的情况。在学生思考沉默的时候教师没有进行合理的引导，而是举了一个具体例子(函数 $y = \sqrt{2}^x$ 与 $y = \log_{\sqrt{2}} x$)，学生后来问：“老师，您是怎么发现这一对函数的？

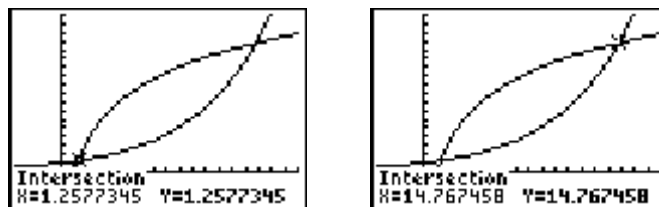
我怎么没有就没有发现呢？如何才能发现呢？”课例 2 通过一个问题激发了学生的求知欲望，并根据不同学生的不同回答进行合理的引导，注重师生、生生交流，关注学生的发展。教育家苏霍姆林斯基说过：“教师如果不想设法使学生产生情绪高昂和智力振奋的内心状态，而是不动情感的脑力劳动，就会带来疲倦，处于疲倦状态下的头脑，是很难有效地汲取知识的。”

教学环节 2：课堂探究——底数 $a > 1$ 的情况

课例三：

教师：哪位同学能谈谈自己的看法？

学生 1：当 $a=1.2$ 时，有两个公共点，并且这两个公共点都落在直线 $y=x$ 上。



教师：不错！还有什么发现吗？

(其他学生陆续发现 $a=1.1$ 、 $a=1.3$ 、 $a=1.4$ 时也有交点，并且交点也落在直线 $y=x$ 上。)

学生 2：当 $a=1.5$ 的时候，两个函数就没有公共点了，而且我发现当 $a > 1.5$ 的时候，永远都不会有公共点。

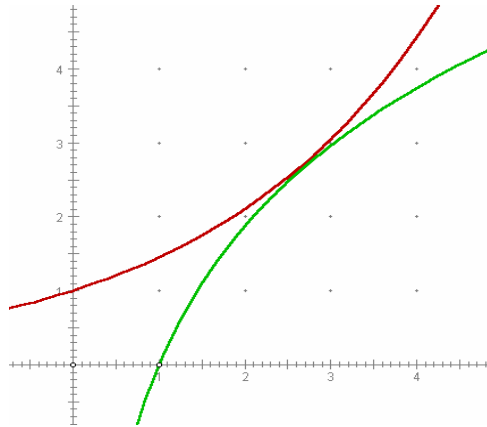
教师：当 $a > 1.5$ 时没有公共点，当 $a=1.2, 1.3, 1.4$ 时有 2 个交点，那么在 2 个公共点和没有公共点之间会存在什么情况呢？

学生：应该有 1 个公共点的情况！

学生 2：从图象的形状来看，1 个公共点时应该是这两个函数相切。

教师：学生 2 的想象很丰富，作出了大胆的猜测。是这样的吗？

(教师结合几何画板，动态展现相切的可能。)



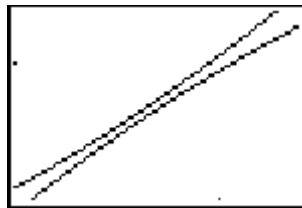
教师：当 a 取某个值时，两个函数的确相切！那么此时 a 应该取何值呢？

学生3：当 $a = 1.45$ 时，恰好相切。



教师：如果采用技术手段 [ZBox] 对图象进行局部放大，看看有什么新发现？

学生3：（操作后发现）原来没有公共点。



教师：学生3的发现虽然是错误的，但是对我们的研究同样有不小的贡献，我

们从学生3的研究结果可以发现：当指数函数 $y = a^x$ 及其反函数对数函

数 $y = \log_a x$ 相切的时候， a 的值应该比1.45小，并且比1.4大！

学生4：那我们可以继续取1.44，1.43，1.42，1.41进行研究。

（教师发现时机成熟，于是引导学生使用二分法的思想，利用刚才同样的技术手段，求解相切时 a 的取值 S 的近似值。 $a = 1.45$ ， $a = 1.445$ ， $a = 1.443$ ， $a = 1.444$ ， $a = 1.4445$ ， $a = 1.4447$ ， $a = 1.4446$ ， $a = 1.44465$ ，……， $S \approx 1.444667861$ ，并得

到结论：当 $a > S$ 时，指数函数 $y = a^x$ 及其反函数没有公共点；当 $a = S$ 时，两个函数有一个公共点；当 $1 < a < S$ 时，两个函数有两个公共点。）

教师研讨反思：不论从学生的课堂反应还是教学效果来看，课例三都达到了预期目标，好象是一节比较成功的课，但课题组经过讨论反思后还是发现了几点不足：一，学生的学习方式应该可以更加完善。教师还是习惯扮演课堂的“主角”，特别是相切的关键时刻，应该想更好的办法引导学生自主探究发现。二，学生的发言教师完全领会了，但是发言的学生不是很多，总是那几个领会老师意图快的学生，他们的发言其他同学领会了吗？教师没有办法从课堂

上找到答案。

课例四：

教师向全班同学交代了研究目标后，让学生分小组合作交流研讨，为了便于学生探究，教师给每个合作小组发了一张研究表格(见附表)，要求合作小组各成员分工明确。小组研讨结束，派一个代表发言。

教师：我们请各小组先谈谈你们的研究过程和研究成果。(以下记录的是几个典型发言)

学生 1：我们小组先是取 $a=2, 3, 4, 5, 6$ 几个值，发现函数 $y=a^x$ 及其反函数

$y=\log_a x$ 没有公共点，于是我们猜测：当 $a \geq 2$ 时，两个函数应该没有公共点；接着我们取 $a=1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$ 进行研究，结果发现当 $a=1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ 时，两个函数有两个公共点，而且都在直线 $y=x$ 上。而当 $a=1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9$ 时，两个函数没有公共点。于是，我们猜测当 $a \geq 1.5$ 时，两个函数应该没有公共点；当 $a < 1.5$ 时，两个函数有两个公共点，而且这两个公共点都在直线 $y=x$ 上。

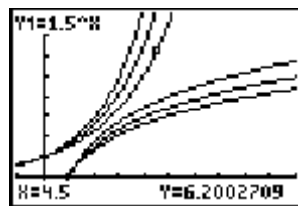
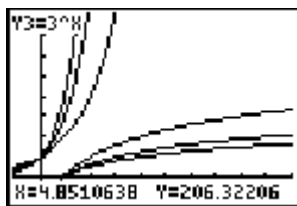
教师：这个结论是不是正确呢？(学生沉默，进一步启发) 1.4 到 1.5 之间还有数吗？

学生 2：(顿悟) 这个结论下的有点武断，因为 1.4 到 1.5 之间还有很多数，比如 1.43, 1.433, 1.4333, 有数不清的数呢！没有对这些数字研究，就不能下结论。

学生 1：(领会的样子) 是有点武断，我们刚才又进一步研究发现当 $a=1.46$ 时，两个函数是没有公共点的。

学生 3：我们也是先取 $a=2, 3, 4, 5, 6$ 几个值，除了发现函数 $y=a^x$ 及其反函

数 $y=\log_a x$ 没有公共点外，我们还发现当 a 逐渐减小时，“两个函数图象离得越来越远”，(发现有学生笑) 可能我的叙述不是很准确，但我相信大家都能懂我的意思。然后我们发现当 a 取小于 2 的数时，两个函数图象也有这样的变化趋势，所不同的是当 $a \geq 1.5$ 时，两个函数应该还没有公共点，但当 $a \leq 1.4$ 时，两个函数就有 2 个公共点了。根据两个函数图象的变化趋势，于是，我们猜测：当 a 取某个值时，两个函数应该会相切，而且这个值就应该介于 1.4 到 1.5 之间。



.....

(省去部分小组的发言)

学生 4：我忽然有个想法：如果当 $a=S$ 时，两个函数图象相切，有一个公共点，

那么当 $a > S$ 两个函数应该没有公共点，当 $1 < a < S$ ，两个函数应该有两个公共点。

教师：同学们听懂学生 4 发言了吗？认同吗？

教师：（见学生们都频频点头）每个小组都有不同程度的发现，现在我们的目标就是要求出 S 的值。我们现在确认 S 介于 1.4 到 1.46 之间，事实上求出 S 的精确值是很难的，但我们可以借助图形计算器来帮助我们求出它的近似值。要求至少保留 5 位小数，如何求呢？

学生 3：（思考片刻）既然 S 介于 1.4 到 1.46 之间，我们可以接着研究 1.43，结果发现当 $a = 1.43$ 时，也是有两个公共点，当然此时要经过局部放大才可以发现。

（教师发现时机成熟，于是引导学生使用二分法的思想，求得 S 的近似值并得到相应结论。）

教师研讨反思：这个课例是在研讨反思课例三后设计和实施的，试图有针对性的改进课例三的不足，从教学情况来看课例四的确比课例三更加成功。这个课例中安排学生合作学习，在合作中要求学生先独立思考、形成认识，然后讨论交流、团体合作，这样就给了学生更多的思考、交流的机会，促进知识内化、完善，尤其是两个函数相切的情况，是学生自主探究的结果，让学生体会了怎样研究数学、怎样做数学，而不是机械地按照教师的安排进行学习。

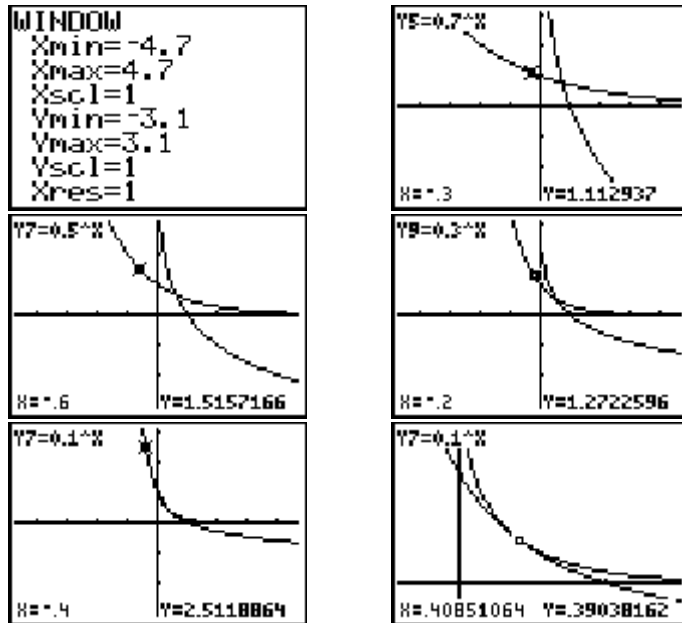
对比反思：从教学的任务来看，两个课例都是较成功的，但从学生的终身发展来看，课例三就有点逊色了。课例三主要以个体学习为组织形式，教师“适时”点拨完成的，学生也有做数学、研究数学的经历，但学生更多地是按教师事先设计好的步骤进行的，还是以教师为主导的学习；课例四以合作学习小组的形式展开，每个小组的探究内容是相同的，但探究的方式方法是开放的，是不尽相同的。学生按照自己的方式方法探究，学习效果反而更好。学生通过考察底数 a 的不同对指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 图象变化趋势的影响探究到结果，执教教师课后也说备课时还真没有想这么多，也没有想到学生会这样探究。正如全国《数学课程标准》指出的那样：“教师应向学生提供充分从事数学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学思想方法，获得广泛的数学活动的经验。”

教学环节 3：课堂探究——底数 $0 < a < 1$ 的情况

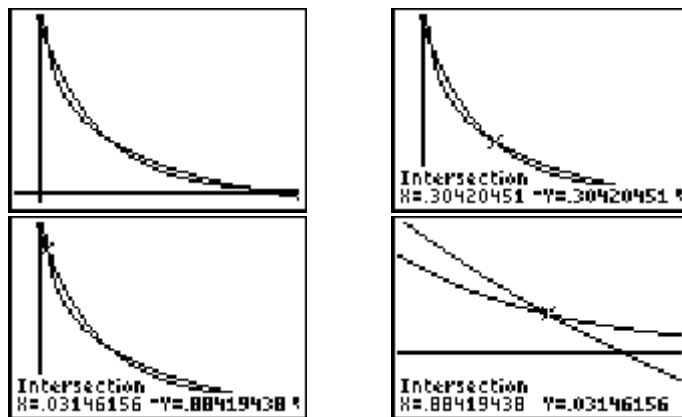
课例五：

学生 1：我们小组借鉴刚才研究底数 $a > 1$ 的情况的思想方法，我们先取 $a = 0.8$ ，

0.6，0.4，0.3，0.2，发现了指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 的图象的变化趋势（作图解释），



于是我们猜想应该有三个公共点的可能，而且我们发现：当 $a = 0.02$ 时，猜想成立，并且此时有一个公共点在直线 $y = x$ 上，另外两个公共点在直线 $y = x$ 外，但关于直线 $y = x$ 对称。



教师：其他小组还有什么补充吗？

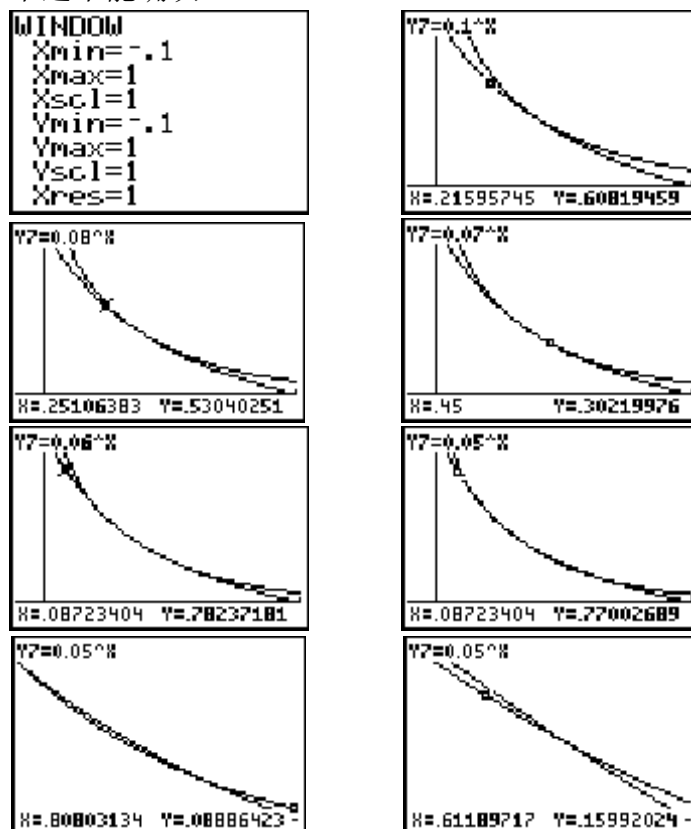
(学生沉默)

教师：我们在研究 $a > 1$ 的情况时，求得了一个 a 的值 S ，并得到结论：当 $a > S$ 时，指数函数 $y = a^x$ 及其反函数没有公共点；当 $a = S$ 时，两个函数有一个公共点；当 $1 < a < S$ 时，两个函数有两个公共点。那么 $0 < a < 1$ 时，有没有类似结论？

学生 1：这一点，我们也想到了，并作了判断：指数函数 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 及其反函数 $y = \log_a x$ 的公共点应该在一个以 $(0,0)$ ， $(0,1)$ ， $(1,0)$ ， $(1,1)$ 为顶点的正方形内，可是图象太复杂，看得不清楚，还没有研究出来。

学生 2：我们这个小组也得到了学生 1 的相同结论，既然公共点应该在一个以 $(0,0)$ ， $(0,1)$ ， $(1,0)$ ， $(1,1)$ 为顶点的正方形内，我们调整了 WINDOW 的设

置参数，作出了当 $a=0.1, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05$ 时图象，将当 $a=0.05$ 的图象局部放大后，可以判断有三个公共点；将 $a=0.1, 0.08$ 时的图象分别放大也可以判断有一个公共点，但图象不是很清楚；至于 $a=0.07, 0.06$ 时的图象，无论怎么放大都看不清楚，不能作出准确判断，可是从计算器作图的过程来判断好象 $a=0.07$ 有一个公共点， $a=0.06$ 有三个公共点，不过不能确认。



教师：从同学们的发言来看，当 $0 < a < 1$ 时，指数函数与其反函数只有一个或三个公共点？难道不会有两个公共点？

学生 3：我们可以说明不会有两个公共点，因为当 $0 < a < 1$ 时， $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$

都与直线 $y = x$ 交于同一个点，而且也只能交于一点，并且 $y = a^x$ 图象与

$y = \log_a x$ 关于直线 $y = x$ 对称，那么它们的公共点也应该关于直线 $y = x$

对称，这样就排除了有两个公共点的可能。

教师：回答得很好，说理也充分！至于学生 2 的疑惑必须依靠 TI 技术手段解决，不能只用放大功能。我们可以利用求两个函数交点的方法，具体操作是：……

……

(省去部分小组发言)

教师：我们可以知道也存在 a 的某个值 T ，当 $0 < a < T$ 时，指数函数 $y = a^x$ 及其

反函数图像的有 3 个交点，其中一个点落在直线 $y = x$ 上，另外一对点关

于直线 $y = x$ 对称; 当 $T \leq a < 1$ 时, 有 1 个交点, 并且这个点落在直线 $y = x$ 上。根据同学们的发现, 这个数字 T 应该就在 0.06 与 0.07 附近。

教师研讨反思: 由于学生有了课例四的研究经历, 学生的操作显然熟练了好多, 研究也很顺利, 教学任务也比较快地就完成了, 可是从课堂上学生的表现来看却不是很理想: 有些研究能力较强的小组此时的研究兴趣却没有前面那么积极了, 课后经过谈心, 教师才了解到这些学生的真实想法: 此时的研究其实就是当 $a > 1$ 时的翻版和重复, 当然有不同的地方, 但方法基本相同; 我们教师还发现, 学生的发言基本相同, 交流的气氛过于平淡, 究其原因, 就在于学生们研究方法和经历基本一致。更重要的一点, 如果课例五与课例四采取同样的处理方法, 当 a 的值在 0.04 到 0.07 之间时, 两个函数图象的区分度不大, 即使是不断局部放大也较难判断, 象课例五中介绍的那样, 利用求交点的方法可以判断出两个函数图象公共点个数, 但很难得到数字 T 的值, 这不能不说是这个课例的最大遗憾! 如何引导学生采取新方法, 更加有效的进行研究学习, 体验新经历是我们课题组反思的重点。

课例六:

与课例五一样, 课例六的教学是在课例四的基础上实施的, 具体说就是: 也是通过组织学生合作学习, 大多数学生也是先观察指数函数 $y = a^x$ 及其反函数 $y = \log_a x$ 图象变化趋势, 然后猜测两个函数可能有三个公共点的情况, 并验证了猜想。所不同的是, 在研究函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ ($0.04 \leq a \leq 0.07$) 引导学生作了一个有意思的转化!

教师: 现在我们遇到的难题是当 a 介于 0.04 与 0.07 之间的时候, 两个函数的图象很难区分, 对它们的公共点个数也不能作出准确的判断。那么我们该怎么办呢?

(学生沉默、思考, 部分同学有些简单的议论、交流)

教师: 同学们是否还记得如何求两个函数的公共点坐标?

学生 1: 解相应的方程组。

教师: 很好! 如果相应的方程组有两组解, 说明两个函数有几个公共点?

学生 2: (很兴奋地) 老师, 我知道了, 要研究 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 的公共点个数其

实只要考察方程组
$$\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases}$$
 有几组解!

教师: 不错! 还有什么补充吗?

学生 3: 老师, 这个方程组怎么解啊! ?

学生 1: (思考片刻) 将方程组中 y 消去, 就转化为考察方程 $a^x - \log_a x = 0$ 解的个数。

教师：聪明！请问：如果方程 $a^x - \log_a x = 0$ 有一个解，那么方程组 $\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases}$ 有

几组解？

学生 1：（不假思索）一组！

教师：为什么呢？

学生 1：为什么？应该就是吧。

教师：如果你将方程 $a^x - \log_a x = 0$ 的一个解 x 求出来了，你如何求 y 的值呢？

学生：代入 $y = a^x$ （或 $y = \log_a x$ ）啊。

学生 4：我知道了，因为 $y = a^x$ 是单调函数，也就是说一个 x 对应着一个 y ，一

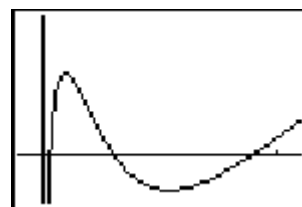
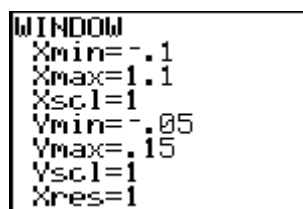
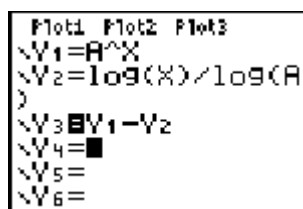
个 y 对应着一个 x ，于是当方程 $a^x - \log_a x = 0$ 有几个解，那么方程组

$\begin{cases} y = a^x \\ y = \log_a x \end{cases}$ 就相应的有几组解。

教师：（冲学生 4 微笑着点了点头，语气加重）很好，很聪明！那么怎么考察方程 $a^x - \log_a x = 0$ 解的个数呢？

学生 4：这不难，我们前段时间刚学过，就是研究函数 $y = a^x - \log_a x$ 零点个数。

.....



最后，也是结合二分法的思想得到：当 $0 < a < T$ 时，指数函数 $y = a^x$ 及其反函数图像的有 3 个交点，其中一个点落在直线 $y = x$ 上，另外一对点关于直线 $y = x$ 对称；当 $T \leq a < 1$ 时，有 1 个交点，并且这个点落在直线 $y = x$ 上。（其中 $T \approx 0.0659880358$ ）

教师研讨反思：这个课例中，教师引导学生把一个研究两个函数公共点的问题转化成研究相应的函数零点个数的问题，在转化过程中教师步步引导，学生豁然开朗，柳暗花明，成功的喜悦自是不用多说，更加重要的是：教师充分利用学生现有的认知水平和知识经验、充分关注学生的最近发展区，让学生增加了新的学习经历，感悟数学思想，有利于促进知识的内化和深化。

对比反思：两个课例都注意到了培养学生的逻辑推理能力、数学的缜密。在课例

五中，教师引导学生对两个函数没有两个公共点进行了说理，在课例六中教师引导学生对研究两个函数公共点问题转化为函数零点个数问题进行了说理，这些都有助于培养学生的数学推理能力。但是，兴趣是学习的最好的老师。在课例五中，由于主要的研究方法与前面没有什么根本的区别——其实就是课例四的重复——有些学生感到了厌倦，更重要的是利用这个研究方法较难得到理想结果；在课例六中，教师适时地引导学生对研究的问题进行了转化，不仅重新唤起了学生的研究兴趣，更是给学生提供了新的学习阅历，有助于学生提高数学能力，形成良好的数学思维品质。

四、基于 TI 手持教育技术的课例研究引发的思考

我们所做的基于 TI 手持教育技术的课例研究是一个“实践——反思——提高——再实践”不断循环往复的过程，在这个过程中通过认真对照课程新理念反思我们的数学教学观、教学过程、教学方法和教学行为等等，在反思中逐步提高了自己的教学能力，而 TI 手持教育技术的应用更是使我们的教学如鱼得水，给我们的课例研究提供了强有力的支持：

第一，TI 手持教育技术使数学家头脑中的抽象思维有了实验的可能，通过实验有助于学生构建知识体系。数学是抽象的语言，而学生的认知规律是先有具体后才会抽象，TI 手持教育技术的使用，可以帮助学生通过观察具体的、特殊的数学现象得到一般的规律，提高数学认识能力。不得不承认的是，如果没有《指数函数及其反函数图象的公共点》这一课就根本不可能顺利地完成任务，也不可能让学生构建正确的知识体系。

第二，TI 手持教育技术的应用，给学生提供了研究数学，学习自己的数学的机会。在传统的数学教学中，学生习惯于教师讲学生听，数学知识纯粹是被灌输的，学生用数学的观点研究问题，也不可能根据自己的情况选择适当的研究方法。数学教学不能仅仅凭经验，要注重以探究为基本过程、体验为主要目的的教学。TI 手持教育技术使我们的课例研究有了更多的选择，我们可以开展更多的课例，利用 TI 手持教育技术可以组织学生开展自主取向的研究性学习，团体合作、讨论交流的合作学习，使学生获得多元的学习机会，给我们的研究提供了更加多的资源。

第三，TI 手持教育技术的应用，给学生提供了反思自己所学知识的机会。在开展课例研究的过程中，我们注意到利用 TI 手持教育技术可以展现学生的数学思维过程、数学的探索过程，有助于学生培养批判性思维，从而进行自主反思和领悟数学知识。

总之，基于 TI 手持教育技术的课例研究希望能够逐步改革教学过程，促进完善学生的学习方式，把“以研究者的方法‘做’数学，以思想者的方法‘悟’数学，以欣赏者的姿态‘品’数学”为课题研究宗旨，经过几年的努力，切实可行的培养学生的数学素养，帮助学生确立终身学习的愿望，奠定终身发展的基础。

主要参考文献：

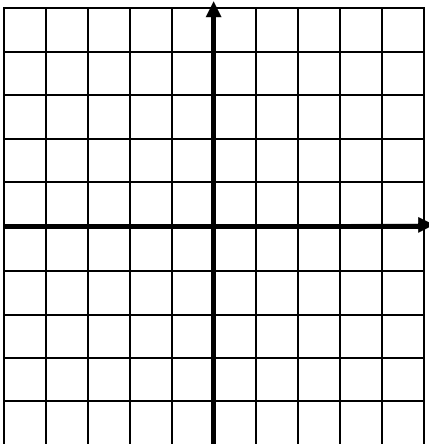
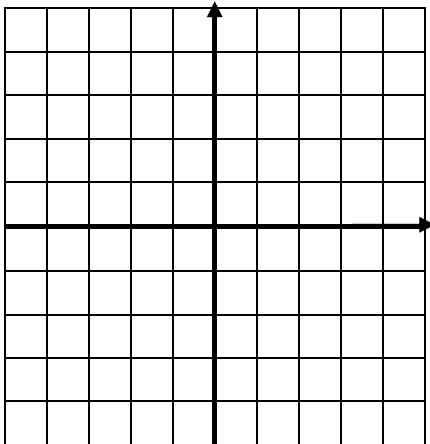
1、《上海市中小学数学课程标准》（试行稿）

上海教育出版社 2004 年 10 月

2、朱幕菊 《走进新课程——与课程实施者对话》（教育部基础教育司组织编写）

北京师范大学出版社 2003 年 5 月

附表：

研究主题	指数函数及其反函数图象的公共点		研究日期		
研究组长		研究组员			
研究内容					
1、你知道指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的大致图形吗？					
					
2、根据反函数的定义，你能在上图中画出该函数的反函数的大致图形吗？					
3、指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 及其反函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象有公共点吗？若有，求出公共点个数及坐标。					
a 值	公共点个数	公共点坐标	a 值	公共点个数	公共点坐标
4、从上述研究中，你可以得到什么结论？					

心得体会					