EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1**

   Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. On considère la suite u définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20; n)$$

   Proposition 2

   La suite (u_n) est convergente.

3. **Proposition 3**

Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.

Pour tout entier naturel n, on note :

- A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.
- B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
- X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

   On admet que, pour tout entier nature n,$X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Proposition 4

La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Proposition 5

Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Proposition 1

Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

Le chiffre des unités est obtenu en calculant le reste de la division euclidienne par 10, calculons donc modulo 10 :

n modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 modulo 10	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2 + n$ modulo 10	0	1	6	2	0	0	2	6	2	0

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4 modulo 10, ainsi le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4, la proposition 1 est vraie.

---

2. On considère la suite u définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n} pgcd(20; n)$$

Proposition 2

La suite (u_n) est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \text{pgcd}(20, n) \leq 20$ donc $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{20}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{20}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{20}{n} = 0 \end{array}\right\} \text{d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Conclusion : la proposition 2 est vraie.

---

3. Proposition 3

Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

Le produit de matrices carrés n'est pas commutatif, le contre-exemple suivant le prouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : la proposition 3 est fausse.

---

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
Pour tout entier naturel n, on note :
- *A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité.*
- *B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.*
- *X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$*

On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

On a $X_{n+1} = M \times X_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ ainsi $b_{n+1} = 0{,}45 a_n + 0{,}7 b_n$

Or d'après le théorème des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} = p(B_{n+1}) &= p_{A_n}(B_{n+1})p(A_n) + p_{\overline{A_n}}(B_{n+1})p(\overline{A_n}) \\ &= p_{A_n}(B_{n+1})p(A_n) + p_{B_n}(B_{n+1})p(B_n) \\ &= p_{A_n}(B_{n+1})a_n + p_{B_n}(B_{n+1})b_n \end{aligned}$$

Par identification on obtient : $\boldsymbol{p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,45}$

Conclusion : la proposition 4 est vraie.

Proposition 5
Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

$$X_1 = M \times X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0{,}55a_0 + 0{,}3b_0 \\ b_1 = 0{,}45a_0 + 0{,}7b_0 \end{cases}$$

Si $b_1 = 3a_1$ alors le système devient $\begin{cases} a_1 = 0{,}55a_0 + 0{,}3b_0 \\ 3a_1 = 0{,}45a_0 + 0{,}7b_0 \end{cases} \underset{L_2 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = 0{,}55a_0 + 0{,}3b_0 \\ 0 = -1{,}2a_0 - 0{,}2b_0 \end{cases}$

Ce qui nous donne $b_0 = -6a_0$ or $a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$ donc $a_0 = b_0 = 0$ ce qui est impossible car $a_0 + b_0 = 1$.

Conclusion : la proposition 5 est fausse.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1 :

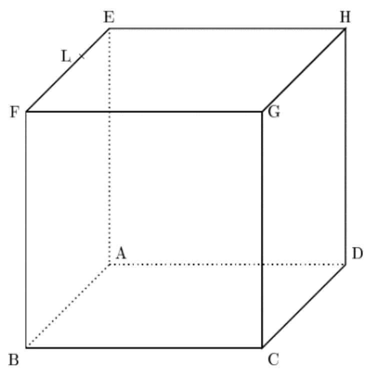
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

2. Proposition 2 :

Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $\left(i(1+i)\right)^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3. $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1.

Le point Lest tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

Proposition 4
Le triangle DBL est rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous.

x	2	3	4	5
Variations de f	3			2
			1	
		0		

Proposition 5 :

L'intégrale $\int_2^5 f(x)dx$ est comprise entre 1,5 et 6.

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Proposition 1 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

On a $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{1+i-(\sqrt{2}+3i)}{1+i-(-4i)} = \frac{1-\sqrt{2}-2i}{1+5i} = \frac{(1-\sqrt{2}-2i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} = \frac{1-\sqrt{2}-10+i(-5+5\sqrt{2}-2)}{1^2+5^2} = \frac{-\sqrt{2}-9+i(-7+5\sqrt{2})}{26}$

$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ n'est pas un nombre réel donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires, ce qui prouve que les points A, B et C ne sont pas alignés.

La proposition 1 est vraie.

---

2. Proposition 2 :

Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $\left(i(1+i)\right)^{2n}$ soit un réel strictement positif.

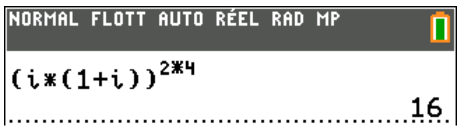
On a pour tout entier naturel n : $\left(i(1+i)\right)^{2n} = i^{2n}(1+i)^{2n} = (i^2)^n \times ((1+i)^2)^n = (-1)^n \times (2i)^n$

Si $n = 4$ alors $(-1)^4 \times (2i)^4 = 1 \times 16i^4 = 16$

La proposition 2 est fausse.

On peut aussi vérifier notre calcul à l'aide de notre TI 83 Premium CE :
Pour accéder au nombre imaginaire pur on appuie sur 2nde i .

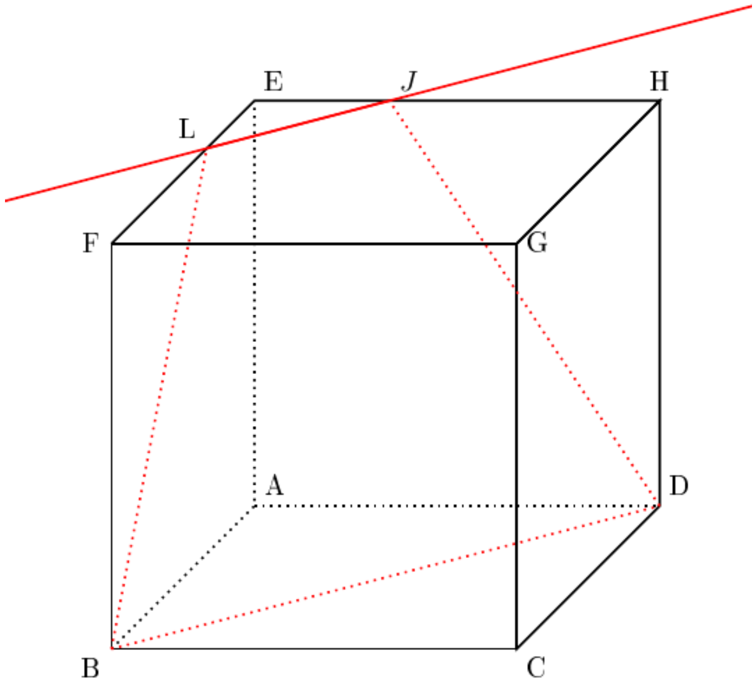
On trouve bien un réel positif pour $n = 4$.



---

3. $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

Proposition 3
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.



Les plans (BCD) et (FGH) sont parallèles donc $(BDL) \cap (BCD)$ et $(BDL) \cap (FGH)$ sont deux droites parallèles. Or $(BDL) \cap (BCD) = (BD)$. Donc $(BDL) \cap (FGH)$ est la parallèle à (BD) passant par L ; cette droite coupe (EH) en J.
La section du cube par le plan (BDL) n'est pas un triangle.

La proposition 3 est fausse.

Proposition 4
Le triangle DBL est rectangle en B.

Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ on a : $D \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $B \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $E \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $F \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. On pose $L \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ or $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

donc $\overrightarrow{EL} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \times 1 \\ y = \frac{1}{3} \times 0 \\ z - 1 = \frac{1}{3} \times 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ d'où $L \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

On en déduit $\overrightarrow{DB}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{vmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\1\end{vmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{BL} = 1\times\left(-\frac{2}{3}\right)+(-1)\times 0+0\times 1 = -\frac{2}{3}$ ainsi le triangle DBL est n'est pas rectangle en B.

La proposition 4 est fausse.

---

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous.

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 :

L'intégrale $\int_2^5 f(x)dx$ est comprise entre 1,5 et 6.

D'aprèsla relation de Chasles on a : $\int_2^5 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx$

Or pour tout $x \in [2;3]$ on a $0 \leq f(x) \leq 3$ donc

$$0 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 3(3-2) \Leftrightarrow 0 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 3$$

Et pour tout $x \in [3;4]$ on a $0 \leq f(x) \leq 1$ donc

$$0 \leq \int_3^4 f(x)dx \leq 1(4-3) \Leftrightarrow 0 \leq \int_3^4 f(x)dx \leq 1$$

Pour finir, pour tout $x \in [4;5]$ on a $1 \leq f(x) \leq 2$ donc

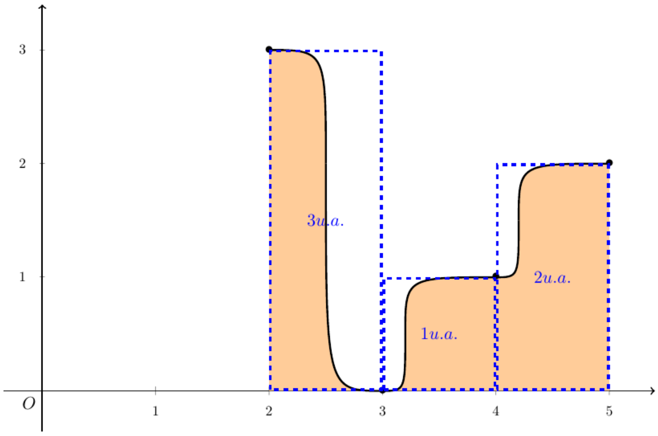
$$1(5-4) \leq \int_4^5 f(x)dx \leq 2(5-4) \Leftrightarrow 1 \leq \int_4^5 f(x)dx \leq 2$$

On peut donc démontrer la majoration, mais pas la minoration.

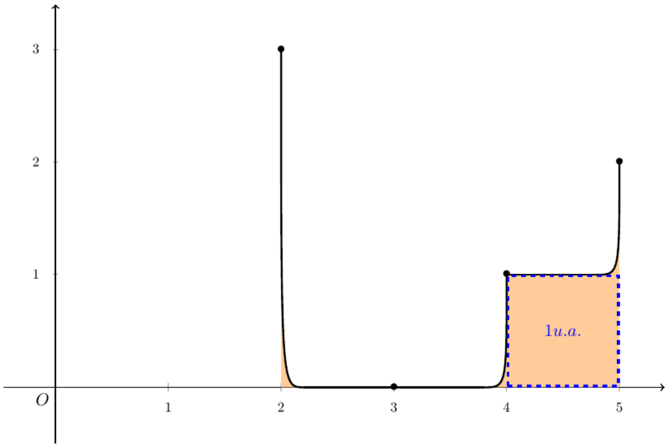
En additionnant les inégalités successives on obtient

$$1 \leq \int_2^5 f(x)dx \leq 6$$

La majoration de l'énoncé correspond bien à ce qu'on a trouvé.



Mais pas la minoration. On peut trouver une fonction dont l'aire est légèrement supérieur à 1 et inférieur à 1,5 et satisfaisant notre tableau de variation :



La proposition 5 est fausse.