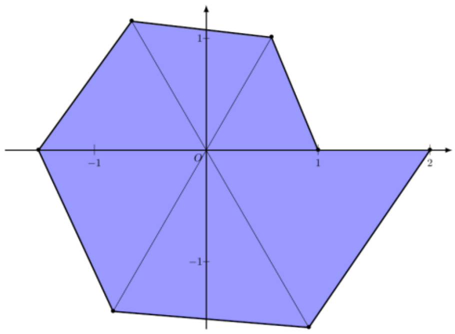
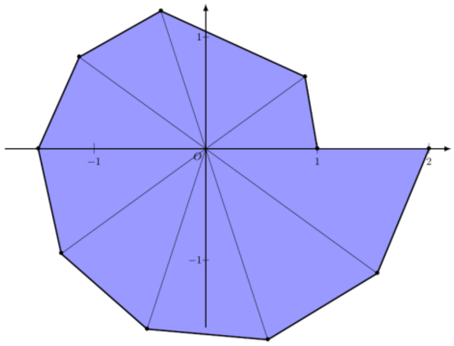
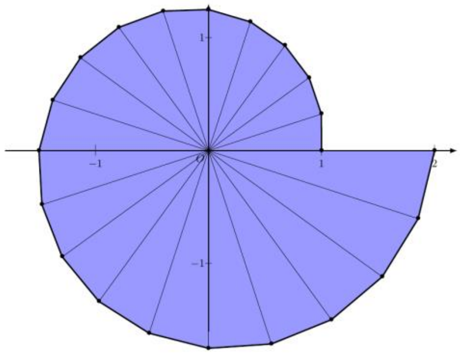
EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile (photo ci-contre) à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.
On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes
$z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}$,
et on note M_k le point d'affixe z_k.

Source : Wikipédia

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$ on obtient les figures ci-dessous :

Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $= 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$

1. Déterminer la forme algébrique exacte de z_1.
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers, que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1, puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k.
2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k},\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$

3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES :	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT :	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à $n-1$
	A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE:	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2 = 0$, que la suite (A_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7{,}3$$

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après, qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n.

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		**Tant que……………………**
L7		n prend la valeur $n+1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n-1$
L10		A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
L11		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	**SORTIE :**	**Afficher…………..**

CORRECTION

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $= 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$

1. Déterminer la forme algébrique exacte de z_1.

$$z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{7}{6}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ donc } \boldsymbol{z_1 = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}}$$

---

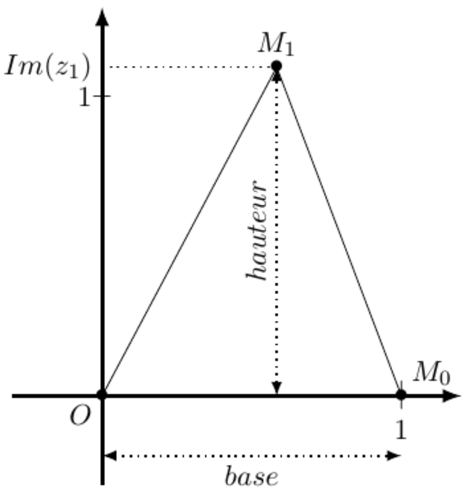
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers, que l'on déterminera.

$z_0 = \left(1+\frac{0}{6}\right)e^{i\frac{2\times 0\pi}{6}} = e^0$ soit $\boldsymbol{z_0 = 1}$ donc **z_0 est bien un entier**.

$z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)e^{i\frac{2\times 6\pi}{6}} = 2e^{i2\pi}$ soit $\boldsymbol{z_6 = 2}$ donc **z_6 est bien un entier**.

---

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1, puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.



L'aire du triangle OM_0M_1 est :

$$\frac{1}{2}\times base \times hauteur = \frac{1}{2}\times OM_0 \times Im(z_1)$$
$$= \frac{1}{2}\times 1 \times \frac{7\sqrt{3}}{12}$$

Donc **l'aire du triangle M_0M_1 est $\frac{7\sqrt{3}}{24}$**.

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

1. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k.

D'après le cours $OM_k = |z_k| = \left|\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right| = 1+\frac{k}{n}$ donc $\boldsymbol{OM_k = 1+\frac{k}{n}}$

2. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}})$

D'après le cours $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) = Arg(z_k)\ \ (2\pi)$

$$= Arg\left(\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\ \ (2\pi)$$

Donc $\boldsymbol{(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) = \frac{2k\pi}{n}\ \ (2\pi)}$ et de la même façon $\boldsymbol{(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}\ \ (2\pi)}$.

On en déduit alors $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}})\ \ (2\pi)$ d'après la relation de Chasles.

$$= -(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}})\ \ (2\pi)$$

$$= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}\ \ (2\pi)$$

Ainsi $\boldsymbol{(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}\ \ \ (2\pi)}$

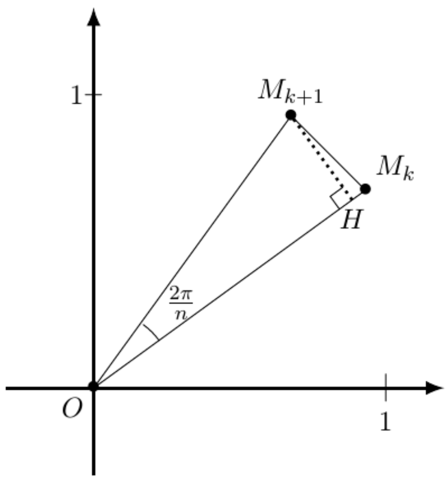
3. Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

La hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est $M_{k+1}H$.

Et on a $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{M_{k+1}H}{M_{k+1}O}$

Ainsi $M_{k+1}H = M_{k+1}O \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

d'où $\boldsymbol{M_{k+1}H = \left(1+\frac{k+1}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$.



4. L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES :	*A est un nombre réel* *k est un entier* *n est un entier*
TRAITEMENT :	*Lire la valeur de n* *A prend la valeur 0* *Pour k allant de 0 à $n-1$* *A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$* *Fin Pour*
SORTIE:	*Afficher A*

On entre dans l'algorithme $n = 10$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme:

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
A	*0,323*	*0,711*	*1,170*	*1,705*	*2,322*	*3,027*	*3,826*	*4,726*		

Ecrivons cet algorithme à l'aide de notre TI83 Premium CE :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:EX04
:Prompt N
:0→A
:For(K,0,N-1)
:A+1/2*sin(2π/N)*(1+K/N)*(
1+(K+1)/N)→A
:Disp K,A
:End
:Disp A
```

On a ajouté **`Disp K,A`** afin d'afficher au cours de la boucle les valeurs successives de k et A.

On exécute le programme

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
prgmEX04
N=?10
```

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
                 3.826481992
                           7
                 4.725793428
                           8
                  5.73090621
                           9
                 6.847698189
                 6.847698189
                        Fait
```

Lorsque $\boldsymbol{k = 8}$ on a $\boldsymbol{A \approx 5,731}$
Lorsque $\boldsymbol{k = 9}$ on a $\boldsymbol{A \approx 6,848}$

On obtient ainsi :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	**5,731**	**6,848**

5. On admet que $A_2 = 0$, que la suite (A_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$$

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après, qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		**Tant que $A < 7,2$**
L7		n prend la valeur $n+1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n-1$
L10		A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
L11		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	**SORTIE :**	**Afficher N.**