EXERCICE 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On noteA_nn le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2.

L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   a. Interpréter géométriquement d_n.

   b. Calculer d_0.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

   d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

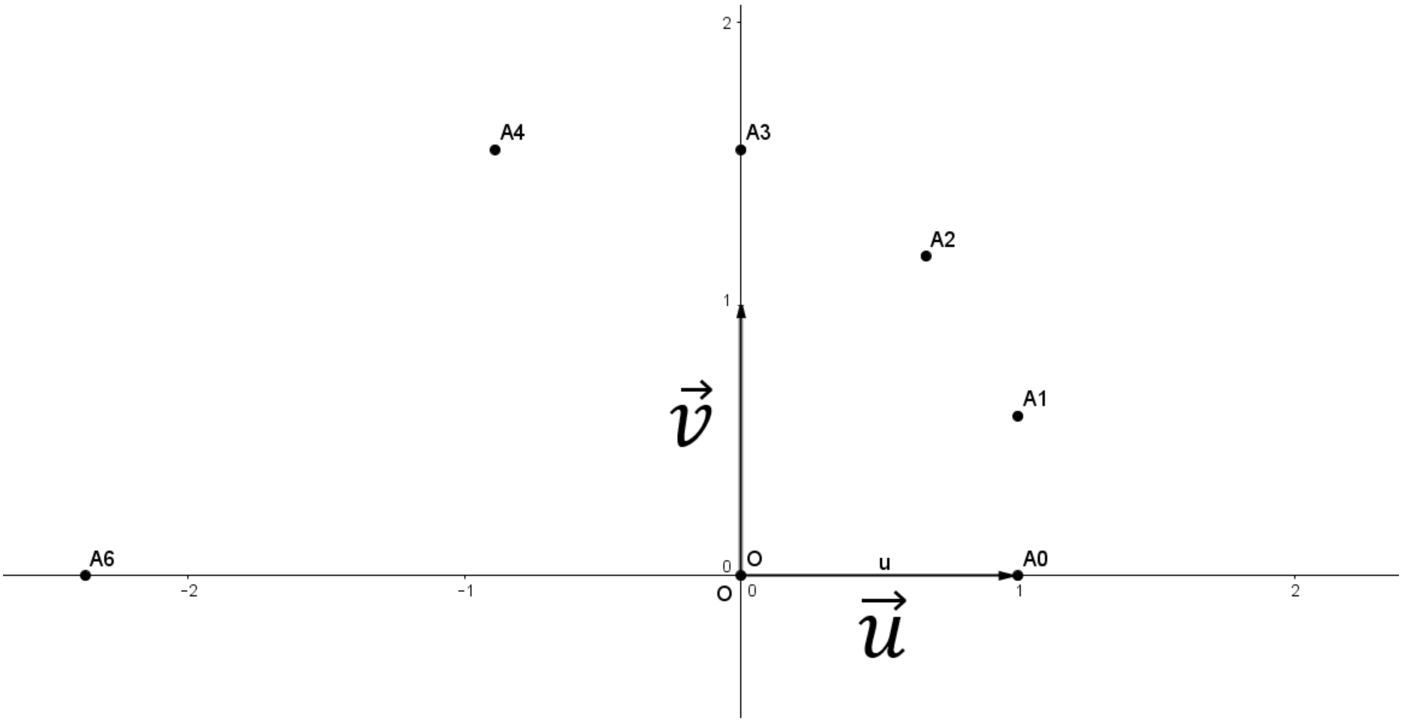
$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

   c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

   d. Justifier cette construction.

ANNEXE 2



CORRECTION

EXERCICE 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

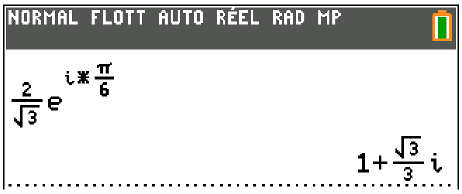
$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$

On a $\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \mathbf{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i}$

On peut vérifier avec sa TI83 Premium :



1. b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

$z_0 = 1$ et $z_1 = z_{0+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_0 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times 1 = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$ d'après 1.a.

De plus $z_2 = z_{1+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_1 = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3} e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Conclusion : $\mathbf{z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}}$ et $\mathbf{z_2 = \frac{4}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n$ donc (z_n) est une suite géométrique de raison $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$
Donc d'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n = z_0 q^n = 1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = \mathbf{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}}$

2. b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

O, A_0 et A_n alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OA_n}) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{z_n-0}{z_0-0}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow Arg(z_n) = 0\ (\pi)$

$\Leftrightarrow n \times \frac{\pi}{6} = 0 + k\pi\ , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k\ , k \in \mathbb{Z}$

Les valeurs de n pour lesquels O, A_0 et A_n sont alignés sont les multiples de 6.

---

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a. Interpréter géométriquement d_n.

D'après le cours, $d_n = |z_{n+1} - z_n| = A_nA_{n+1}$.

3.b. Calculer d_0.

$$d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| = \left|i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Conclusion : $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

---

3. c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$$

---

3. d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|\left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)\right|$ d'après la question 3.c

Ainsi $d_{n+1} = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| \times |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \times |z_{n+1} - z_n| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} \times d_n = \sqrt{\frac{4}{3}} \times d_n = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D'après le cours on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{d_n} = d_0 q^n = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$

---

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$$

On sait d'après les questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N} : z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$ et $d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$

Donc d'une part $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_{n+1}|^2 = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right|^2 = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^{n+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$

Et d'autre part , $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z_n|^2 + d_n^2 = \left|\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}\right|^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Donc $\boldsymbol{|z_n|^2 + d_n^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} = |z_{n+1}|^2}$

---

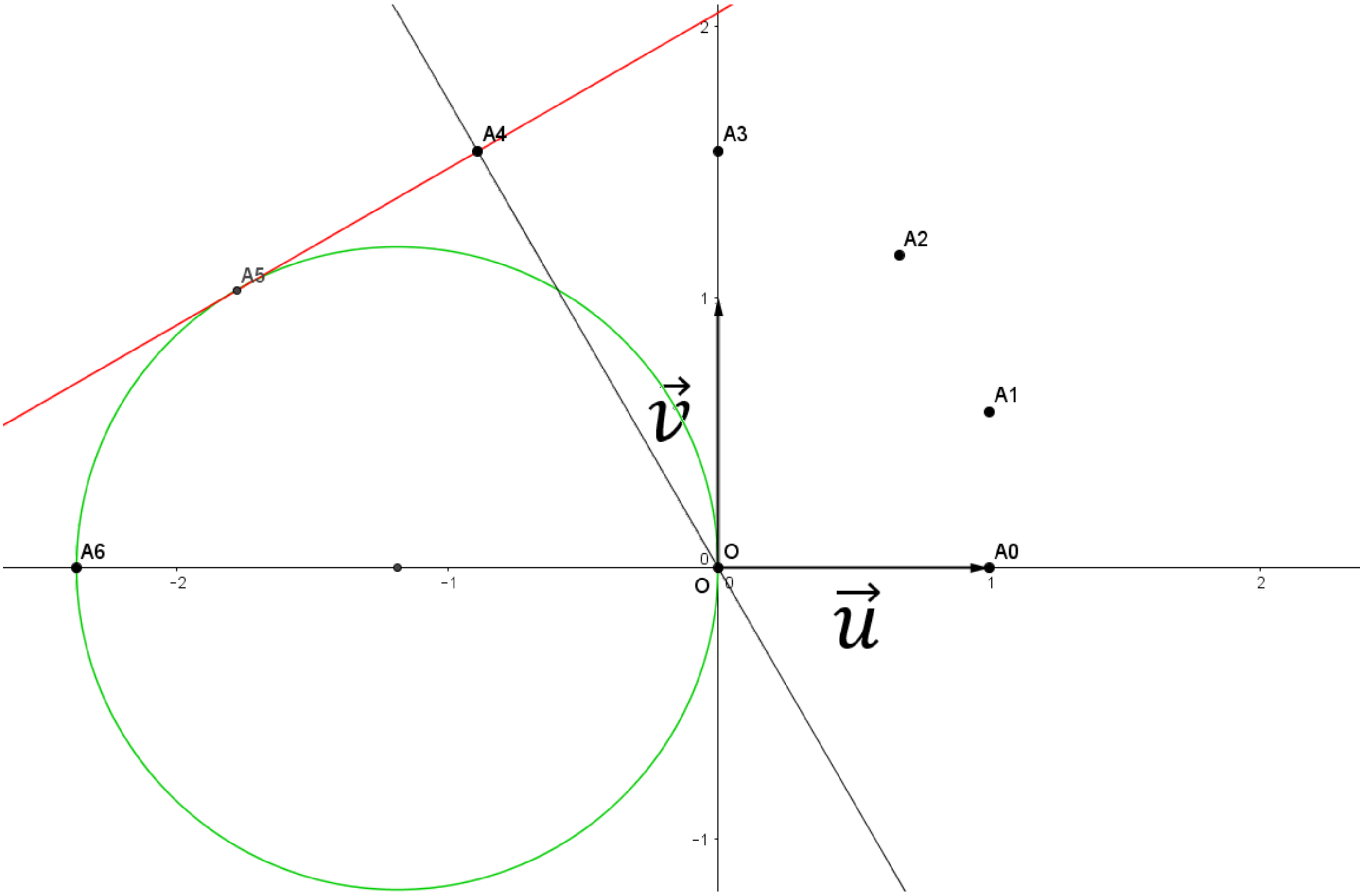
4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} : |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2 \Leftrightarrow OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$

$\Leftrightarrow$ **le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n**

---

4. c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.



4. d. Justifier cette construction.

On sait d'après la question 4.b. on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

Ainsi le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4. Ainsi A_5 appartient à la perpendiculaire à (OA_4) passant par A_4 tracé en rouge sur le graphique.

De plus le triangle OA_5A_6 est rectangle en A_5, donc A_5 appartient au cercle de diamètre $[OA_6]$ en vert sur le graphique.

A_5 est à l'intersection du cercle vert et de la droite rouge.