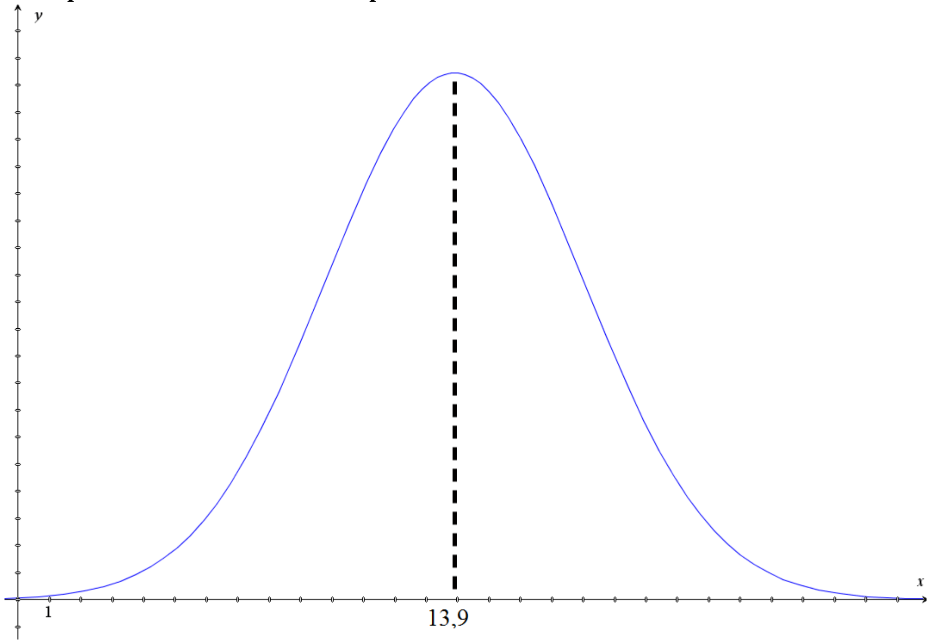
EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13{,}9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T > 22) = 0{,}023$.
   En exploitant cette information :
   a. Hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;
   b. Déterminer $p(5{,}8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.

2. On choisit un jeune en France au hasard.
   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
   Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.
Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère.
Aussi, elle propose le protocole (P) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
Pour chaque jeune de cet échantillon :
• le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
• l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

◊ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par «Oui » ou «Non » de façon sincère ; ◊ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre «Oui » ; ◊ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre «Non ».

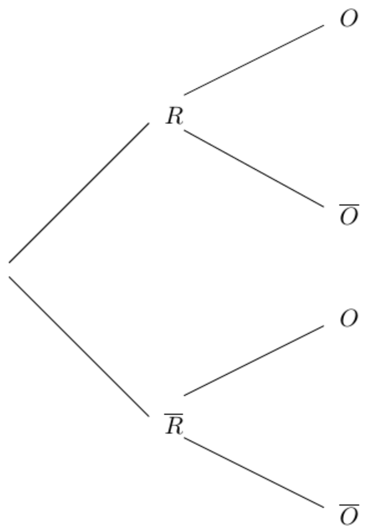
Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.
On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1. Calculs de probabilités

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (P).

On note :
R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$$

2. Intervalle de confiance

   a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (P). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses «Oui ».
   Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent «Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.
   b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

CORRECTION

EXERCICE 1 — 4 points

Partie A

T est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13{,}9$ et d'écart type σ.

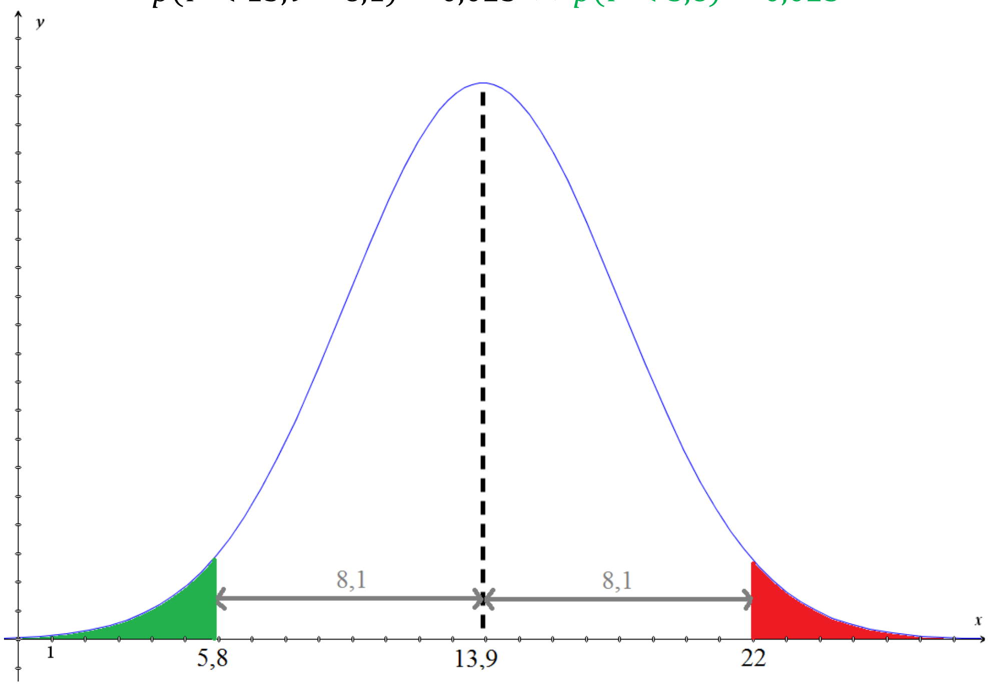
1. On sait que $\mathbf{p(T > 22) = 0,023}$. En exploitant cette information :

a. Hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;

On sait que $p(T > 22) = 0{,}023$ on hachure donc la partie du plan délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 22$ (la partie à droite).

L'égalité $p(T > 22) = 0{,}023 \Leftrightarrow p(T > 13{,}9 + 8{,}1) = 0{,}023$.
Donc par symétrie de la courbe de la loi normale on en déduit :

$$p(T < 13{,}9 - 8{,}1) = 0{,}023 \Leftrightarrow p(T < 5{,}8) = 0{,}023$$



1. b. ***Déterminer $p(5,8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4,1.***

$p(5{,}8 \leq T \leq 22) = 1 - p(T > 22) - p(T < 5{,}8) = 1 - 0{,}023 - 0{,}023 = 0{,}954$

On en déduit σ en effectuant en utilisant le résultat précédent et en se ramenant à une loi normale centrée réduite (c'est la méthode classique lorsqu'on a un paramètre inconnu) :
$p(T \leq 22) = 1 - p(T > 22) = 0{,}977 \Leftrightarrow p(T - 13{,}9 \leq 22 - 13{,}9) = 0{,}977$

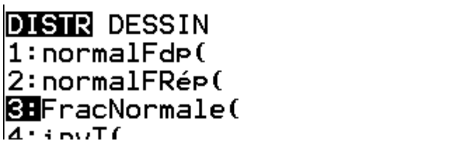
$$\Leftrightarrow p(T - 13{,}9 \leq 8{,}1) = 0{,}977 \Leftrightarrow p\left(\frac{T - 13{,}9}{\sigma} \leq \frac{8{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}977$$

T suit une loi normale de paramètre $\mu = 13{,}9$ et d'écart type σ, donc d'après le cours, $X = \frac{T-13{,}9}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite. D'où $p\left(X \leq \frac{8{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}977$.

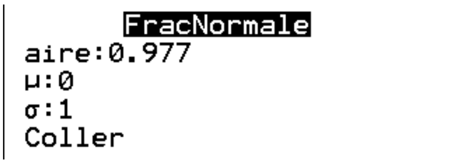
Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
https://youtu.be/kxzKIGNr33U

On peut ainsi utiliser la loi normale inverse :

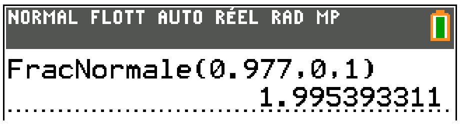
On appuie sur 2nde var (distrib) puis on choisit **FracNormale(**



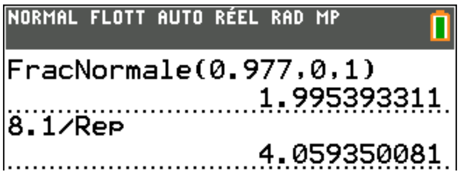
On complète la boite de dialogue :



D'où $\frac{8{,}1}{\sigma} \approx 1{,}99539$



On en déduit que $\sigma \approx \frac{8{,}1}{1{,}99539}$
soit $\boldsymbol{\sigma = 4{,}1}$ à 10^{-1} près.



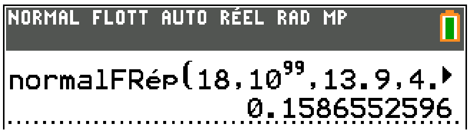
2. On choisit un jeune en France au hasard.
Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

Retrouvez la séquence ci-dessous en vidéo ! :
[https://youtu.be/ watch?v=Vb4JxmiftVU](https://youtu.be/watch?v=Vb4JxmiftVU)

On demande de calculer $p(T \geq 18)$. Sur notre TI-83 Premium CE, on appuie sur sur [2nde] [var] (distrib) puis on choisit **normalFRép(**

On complète la boite de dialogue : La moyenne est de $\mu = 13{,}9$ et l'écart type de $\sigma = 4{,}1$: (on rappelle que pour la calculatrice, $+\infty$ correspond à 10^{99})

On obtient ainsi $\boldsymbol{p(T \geq 18) = 0,16}$ à 10^{-2} près.



Partie B

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré :
En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu « Oui » est : $q=\frac{1}{2}p+\frac{1}{6}$

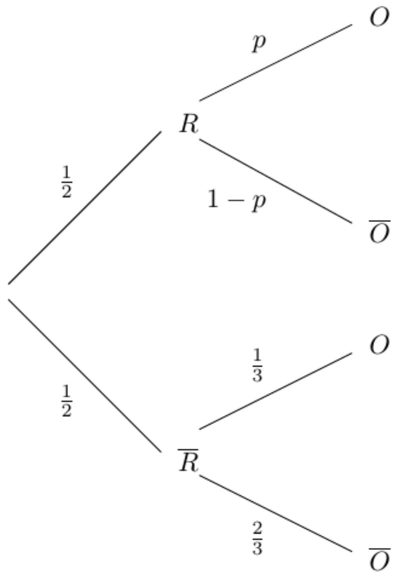
Le dé est supposé parfaitement équilibré, donc $p(R)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ on en déduit que $p(\bar{R})=\frac{1}{2}$.

D'autre part lorsque le résultat du dé est un nombre pair, le jeune répond sincèrement donc $p_R(O)=p$ et ainsi $p_R(\bar{O})=1-p$.

Si la face obtenue est impaire, alors dans un cas le jeune répond « oui » et dans 2 cas il répond « non », ce qui nous donne :

$p_{\bar{R}}(O)=\frac{1}{3}$ et ainsi $p_{\bar{R}}(\bar{O})=\frac{2}{3}$.
D'après le théorème des probabilités totales on en déduit :

$$q=p(O)=p\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boldsymbol{q=\frac{1}{2}p+\frac{1}{6}}$$



---

2. a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (P). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses «Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent «Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

La taille de l'échantillon est $n=1500$, la fréquence du « oui » pour cet échantillon est $\hat{q}=\frac{625}{1500}\approx 0{,}417$. Ainsi $\hat{q}\in[0{,}2;0{,}8]$. Donc d'après le cours, l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, de la proportion q de jeunes qui répondent «Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans est

$$\left[\hat{q}-\frac{1}{\sqrt{1500}};\hat{q}+\frac{1}{\sqrt{1500}}\right]$$

Donc dans plus de 95% des cas,

$$\boldsymbol{q\in[0{,}390;0{,}443]}$$

```
625/1500-1/√1500
            0.3908467777
625/1500+1/√1500
            0.4424865556
```

---

2. b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

On sait que $q \in [0{,}390; 0{,}443]$ et la relation $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$ nous donne :

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \in [0{,}390; 0{,}443]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}p \in \left[0{,}390 - \frac{1}{6}; 0{,}443 - \frac{1}{6}\right]$$

$$\Leftrightarrow p \in \left[2 \times \left(0{,}390 - \frac{1}{6}\right); 2 \times \left(0{,}443 - \frac{1}{6}\right)\right]$$

Donc dans plus de 95% des cas

$$\boldsymbol{p \in [0,446; 0,553]}$$

```
2*(0.39-1/6)
                0.4466666667
2*(0.443-1/6)
                0.5526666667
```