Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels N par
$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur N par $v_n = u_n - 10\times 0{,}5^n$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).
b. En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.
c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.

```
Entrée : n et u sont des nombres
Initialisation : n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Traitement : Tant que ………………. (1)
n prend la valeur ............................(2)
u prend la valeur ...........................(3)
Fin Tant que
Sortie : Afficher n
```

CORRIGÉ

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels N par
$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times0{,}5^n$.

1. **a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

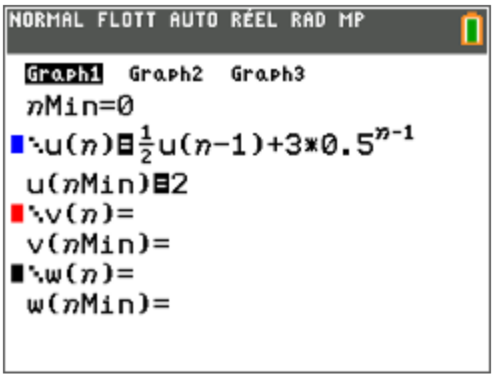
Entrons l'expression de la suite dans notre calculatrice : On commence par modifier les réglages en appuyant sur quitter mode puis modifié afin d'être en mode suite.

Entrons maintenant l'expression de la suite. Pour cela on appuie sur graph stats f1 f(x)
L'expression qu'attend la calculatrice est u_n en fonction de u_{n-1} ainsi nous allons transformer la relation donnée dans l'énoncée :

On sait que $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3\times0{,}5^n$ donc $u_n = \frac{1}{5}u_{n-1} + 3\times0{,}5^{n-1}$

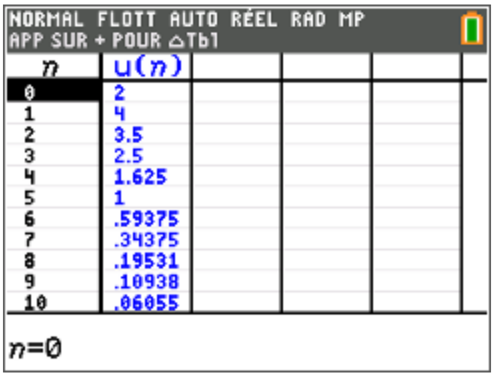
*n*Min représente le premier indice de la suite. Ici c'est 0 (dans la définition de la suite $u_0 = 2$)

u(*n*Min) correspond ici à u_0 c'est la valeur du premier terme de la suite soit 2 dans notre exercice.



n est obtenu en appuyant sur la touche X,T,θ,n et u est obtenu en appuyant sur 2nde 7

Pour afficher la tableau de valeurs on appuie sur 2nde graphe. On obtient l'écran suivant :



On recopie les valeur en arrondissant à 10^{-2} près comme demandé :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	4	3,5	2,5	1,63	1	0,59	0,34	0,20

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

La suite (u_n) semble décroissante.

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0,5^n$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \geq \frac{15}{4}\times 0{,}5^n$:

Initialisation : Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
$\frac{15}{4}\times 0{,}5^0 = \frac{15}{4}\times 1 = \frac{15}{4}$ or $u_0 = 2$ on a donc bien $u_0 \geq \frac{15}{4}\times 0{,}5^0$. La proposition est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que la proposition soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$

$\frac{1}{5} u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n \times \frac{1}{5}$

$\frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n \geq \frac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3\right) \times 0{,}5^n$ car par définition $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ or $0{,}5^n \geq 0{,}5^{n+1}$ donc $u_{n+1} \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$

La proposition est bien vraie au rang $n + 1$.

<u>**Conclusion**</u> : Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$:

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$

Or $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc $-u_n \leq -\frac{15}{4} \times 0{,}5^n$

$-\frac{4}{5} u_n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$

$-\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n \leq -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} - u_n \leq -3 \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$

Ce qui prouve que (u_n) est décroissante.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

On sait d'après la question 2.a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ or $\frac{15}{4} \times 0{,}5^n \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est minorée par 0, de plus elle est décroissante d'après la question 2.b. donc d'après la théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}$ or par définition de la suite (u_n) on a $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n$

Ce qui nous donne : $v_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{5} u_n + 0{,}5^n (3 - 10 \times 0{,}5)$

Ainsi $v_{n+1} = \frac{1}{5} u_n - 2 \times 0{,}5^n = \frac{1}{5} (u_n - 2 \times 5 \times 0{,}5^n) = \frac{1}{5} (u_n - 10 \times 0{,}5^n) = \frac{1}{5} v_n$.

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = -8$.

b. En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

(v_n) est une suite géométrique, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0\times\left(\frac{1}{5}\right)^n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Or $v_n = u_n - 10\times 0{,}5^n$ donc $-8\left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10\times 0{,}5^n$ d'où $u_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0{,}5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après le cours, si $-1 < q < 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \; et \; \lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$$

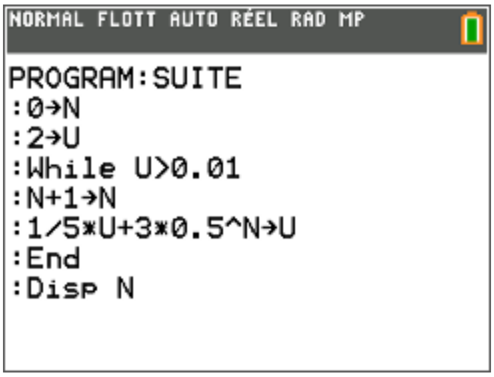
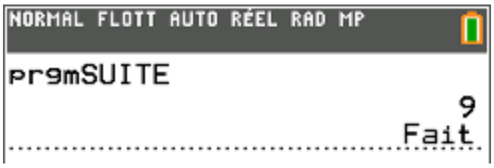
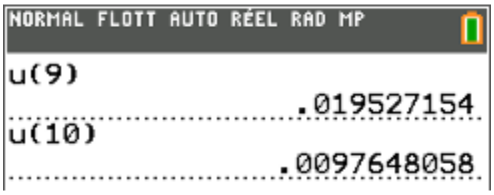
Ce qui prouve que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée : n et u sont des nombres
Initialisation : n prend la valeur 0
u prend la valeur 2
Traitement : Tant que $u > 0{,}01$
n prend la valeur $n + 1$
u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3\times 0{,}5^n$
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

Entrons ce programme sa notre TI-83 Premium CE afin de vérifier qu'il fonctionne : Pour écrire le programme, on appuie sur prgm, puis on choisit l'onglet NOUVEAU.	
Et on entre le nom du programme, ici on a choisit SUITE.	

<table>
<tr><td>Puis on entre le programme :</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Pour l'exécuter on doit sortir tout d'abord de l'éditeur de programme en appuyant sur 2nde quitter mode puis, pour exécuter le programme on appuie sur prgm, dans l'onglet EXEC on sélectionne le nom de son programme :</td><td>
</td></tr>
<tr><td>On obtient le résultat suivant :</td><td>
</td></tr>
<tr><td>On peut vérifier en calculant u_9 et u_{10} :</td><td>
</td></tr>
<tr><td><u>Conclusion :</u> 10 est la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0{,}01$.</td><td></td></tr>
</table>