# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
$A(1; 2; 7), B(2; 0; 2), C(3; 1; 3), D(3; -6; 1)$ et $E(4; -8; -4)$.

1°) Monter que les points $A, B$ et $C$ ne sont pas alignés.

2°) Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où $b$ et $c$ désignent deux nombres réels.

a) Déterminer les valeurs de $b$ et $c$ telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan $(ABC)$.
b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est : $x - 2y + z - 4 = 0$
c) Le points $D$ appartient-il au plan $(ABC)$ ?

3°) On considère la droite D de l'espace donc une représentation paramétrique est :
$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ où $t$ est un nombre réel.

a) Le droite D est-elle orthogonale au plan $(ABC)$ ?
b) Déterminer les coordonnées du point $H$, intersection de la droite D et du plan $(ABC)$.

4°) Etudier la position de la droite $(DE)$ par rapport au plan $(ABC)$.

---

## CORRIGÉ

**1°) Montrer que les points $A, B$ et $C$ ne sont pas alignés.**

On a $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}$ et on a $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix}$

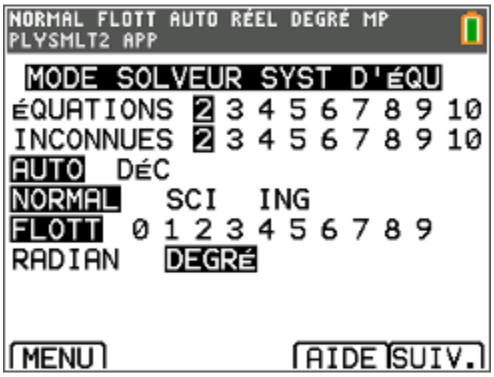
Cherchons si il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k \\ -2 = -k \\ -5 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = 2 \\ k = \frac{5}{4} \end{cases}$ impossible. Ceci prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points $A, B$ et $C$ ne sont pas alignés.

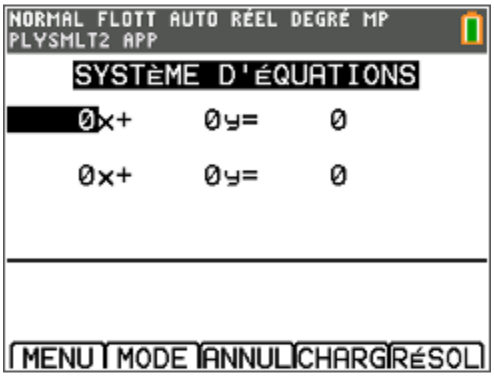
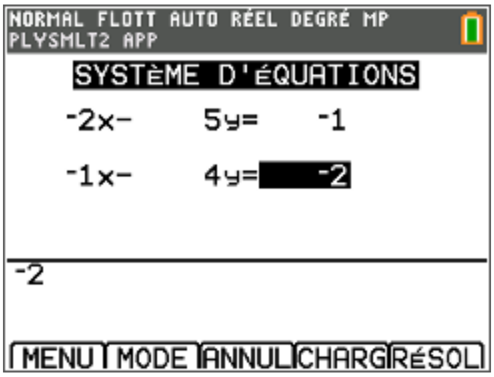
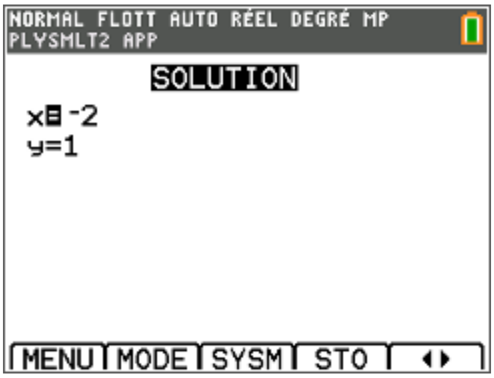
**2°) Soit $\vec{u}(1; b; c)$ un vecteur de l'espace, où $b$ et $c$ désignent deux nombres réels.**
**a) Déterminer les valeurs de $b$ et $c$ telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan $(ABC)$.**

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$ si et seulement si $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\times 1 + b\times(-2) + c\times(-5) = 0 \\ 1\times 2 + b\times(-1) + c\times(-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{2L_2 - L_1} \begin{cases} 1 - 2b - 5c = 0 \\ 2 - b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b - 5c = 0 \\ 3 - 3\square = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vérifions ces résultats avec notre TI-83 Premium CE :
Pour avoir accès à la résolution de système, on appuie sur résol puis on choisit 2:PlySmlt2 et 2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS et on sélectionne deux équations et deux inconnues :



| | |
|---|---|
| Puis on appuis sur graphe (SUIV.) pour entrer les coefficients du système : |   |
| Ici $x$ joue le rôle de $b$ et $y$ le rôle de $c$. Il faut aussi écrire le système sous cette forme : $\begin{cases} 1-2b-5c=0 \\ 2-b-4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-5c=-1 \\ -b-4c=-2 \end{cases}$ |   |
| Enfin pour résoudre ce système on appuie sur graphe (RESOL) : |   |

Ce qui confirme notre résolution.

**Conclusion :** $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=1 \end{cases}$.

**b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan $(ABC)$ est : $x - 2y + z - 4 = 0$**

On sait d'après la question précédente que $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$ donc

$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$ on a $\overrightarrow{AM}\begin{vmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-7 \end{vmatrix}$ et $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$

On a donc $(x-1)\times 1 + (y-2)\times(-2) + (z-7)\times 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + z - 1 + 4 - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + z - 4 = 0$

Conclusion : $(ABC): x - 2y + z - 4 = 0$

**c) Le points $D$ appartient-il au plan $(ABC)$ ?**

Calculons $x_D - 2y_D + z_D - 4 = 3 - 2\times(-6) + 1 - 4 = 12 \neq 0$ donc le point $D \notin (ABC)$

**3°) On considère la droite D de l'espace donc une représentation paramétrique est :**

$\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \end{cases}$ **où $t$ est un nombre réel.**

**a) Le droite D est-elle orthogonale au plan $(ABC)$ ?**

D'après le cours, le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D.

Or $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$. Donc D est orthogonale au plan $(ABC) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires.

Or on remarque que $\vec{u} = 2\vec{n}$ ce qui prouve que $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc D est orthogonale au plan $(ABC)$.

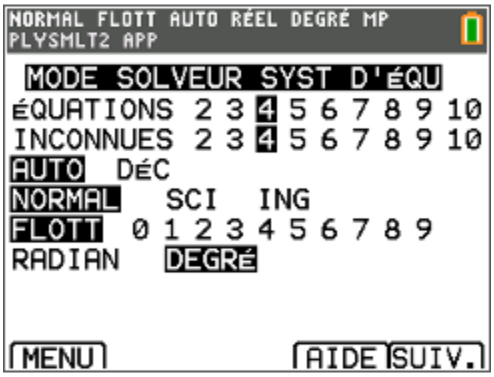
**b) Déterminer les coordonnées du point $H$, intersection de la droite D et du plan $(ABC)$.**

$$H\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathrm{D} \cap (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \\ 2t + 3 - 2(-4t+5) + 2t - 1 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \\ 12t - 12 = 0 \end{cases}$$

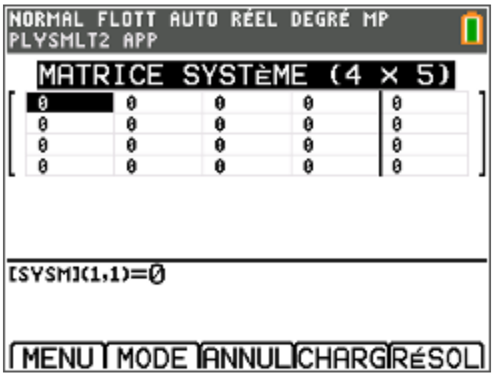
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = -4t+5 \\ z = 2t-1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vérifions notre résolution avec notre TI-83 Premium CE :

On appuie sur [apps F résol] puis on choisit **2:PlySmlt2** et **2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS** et on sélectionne deux équations et deux inconnues :

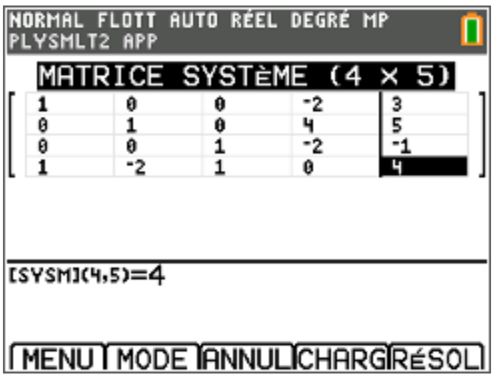


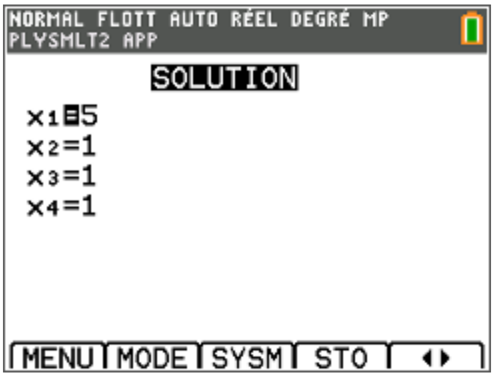

Puis on appuis sur [table f5 graphe] (SUIV.) pour entrer les coefficients du système :




On entre les coefficients de $x, y, z$ et $t$ ainsi que la constante (après le $=$).

Il faut aussi écrire le système sous cette forme : $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad\qquad - 2t = 3 \\ \qquad y \qquad + 4t = 5 \\ \qquad\qquad z - 2t = -1 \\ x - 2y + z \qquad = 4 \end{cases}$



| | |
|---|---|
| Enfin pour résoudre ce système on appuie sur graphe (RESOL) : |  |
| Ce qui confirme notre résolution.<br>Ainsi $H\left\|\begin{matrix}5\\1\\1\end{matrix}\right.$ | |

.

**4°) Etudier la position de la droite $(DE)$ par rapport au plan $(ABC)$.**

On a $D(3;-6;1)$ et $E(4;-8;-4)$ donc $\overrightarrow{DE}\left|\begin{matrix}1\\2\\-5\end{matrix}\right.$ est un vecteur directeur de la droite $(DE)$.

Et $\vec{n}\left|\begin{matrix}1\\-2\\1\end{matrix}\right.$ est un vecteur normal au plan $(ABC)$.

Cherchons si il existe un réel $k$ tel que $\vec{n}=k\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \begin{cases}1=k\\-2=2k\\1=-5k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=1\\k=-1\\k=-\frac{1}{5}\end{cases}$ impossible. Ceci prouve que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires donc la droite $(DE)$ et le plan $(ABC)$ sont sécants en un point.

Déterminons si la droite $(DE)$ et le plan $(ABC)$ sont orthogonaux :
$\vec{n}.\overrightarrow{DE}=1\times1+(-2)\times2+1\times(-5)=-8\neq0$ donc $(DE)$ et $(ABC)$ ne sont pas orthogonaux.