NOMBRES COMPLEXES

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans C l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans C de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances
On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $\bar{z} = x - iy$..
Démontrer que :
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans C de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

CORRIGÉ

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

On est en présence d'une équation du second degré à coefficients réels.
Calculons donc $\Delta = 4^2 - 4\times1\times16 = -48$. Ainsi $\Delta < 0$ il existe donc deux solutions complexes conjuguées :

$Z = \frac{-4-i\sqrt{48}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3}$ ou $Z = \frac{-4+i\sqrt{48}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$

Conclusion : $\boldsymbol{S = \{-2 - 2i\sqrt{3}; -2 + 2i\sqrt{3}\}}$

Ecrivons ces solutions sous forme exponentielle :

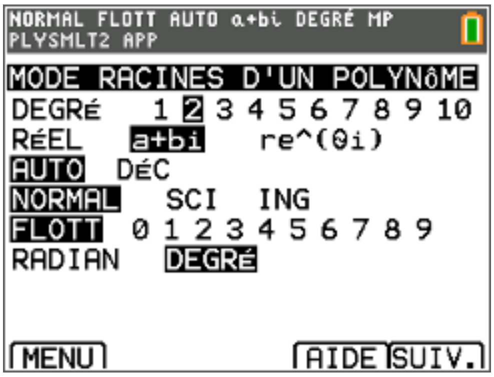
$|-2 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

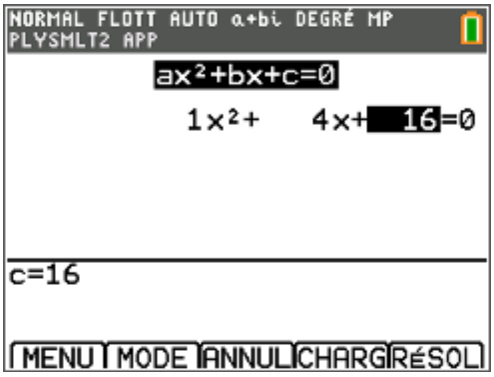
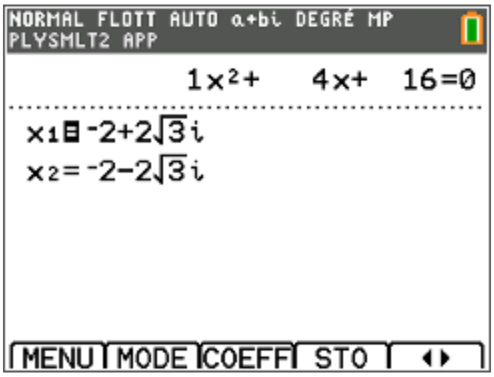
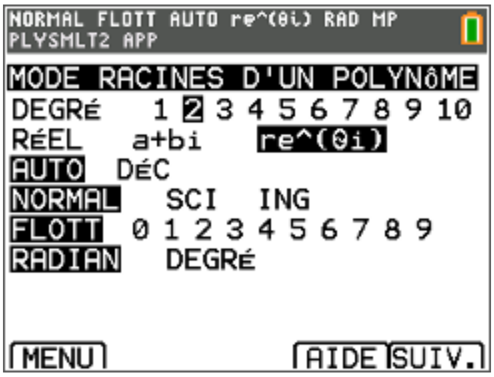
ainsi $-2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

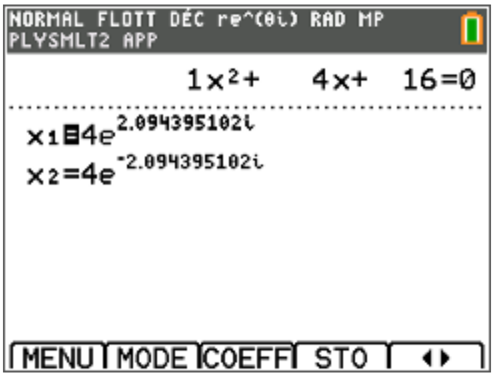
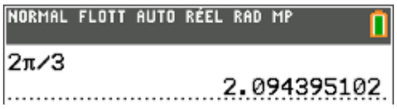
Et donc en utilisant la propriété du conjugué : $-2 + 2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Conclusion : $\boldsymbol{S = \left\{4e^{-i\frac{2\pi}{3}}; 4e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}}$

Pour avoir accès à la résolution de système, on appuie sur apps F résol puis on choisit 2:PlySmlt2 et 2:SOLVEUR SYST D'ÉQUATIONS et on sélectionne une équation et une inconnue :



Puis on appuis sur table f5 graphe (SUIV.) pour entrer les coefficients de l'équation :	
Enfin pour résoudre ce système on appuie sur table f5 graphe (RESOL) :	
On peut aussi obtenir les solutions sous forme exponentielle : On retourne à la fenêtre de paramétrage en appuyant sur déf table f2 fenêtre (MODE) : On sélectionne la notation $re^{i\theta}$ ainsi que le mode RADIAN.	

	
On peut vérifier que l'expression décimale de l'argument est le même que le nôtre :	

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.
Calculer a^2 sous forme algébrique.
En déduire les solutions dans C de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

On sait que $|a| = 2$ et $Arg(a) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ donc d'après le cours $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
Ainsi $a^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3}$ d'après les résultats de la questions 1.

Résolvons maintenant $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$:

$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^2 = a^2 \Leftrightarrow (z-a)(z+a) = 0 \Leftrightarrow z = a$ ou $z = -a$.
$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$

Conclusion : $S = \{1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $\bar{z} = x - iy$..
Démontrer que :
— Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
— Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

On pose $z_1 = x_1 + iy_1$ avec x_1 et y_1 des réels ainsi que $z_2 = x_2 + iy_2$ avec x_2 et y_2 des réels.
On a donc d'une part : $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
Ce qui nous donne $\overline{z_1 z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

D'autre part : $\overline{z_1}.\overline{z_2} = \overline{(x_1 + \imath y_1)}.\overline{(x_2 + \imath y_2)} = (x_1 - iy_1).(x_2 - iy_2)$
$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Ce qui prouve que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$:

<u>Initialisation</u> : Montrons que la proposition est vraie au rang 1 :
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\overline{z^1} = \bar{z} = (\bar{z})^1$.
La proposition est donc vraie au rang 1.

<u>Hérédité</u> : Supposons que la proposition soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:
$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \bar{z}$ d'après la propriété précédente (on a pris $z_1 = z^n$ et $z_2 = z$)
Or d'après l'hypothèse de récurrence $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ ainsi $\overline{z^n} \times \bar{z} = (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$

Ce qui prouve que $\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^{n+1}$. La proposition est bien vraie au rang $n + 1$.

<u>Conclusion</u> : Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$:

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E).
En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Supposons que z soit une solution de (E) alors $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.
Ainsi $\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{z^4} + \overline{4z^2} + \overline{16} = 0 \Leftrightarrow \bar{z}^4 + 4\bar{z}^2 + 16 = 0$ d'après 3.

Ce qui prouve que $\bar{z}$ est bien une solution de (E).

Résolvons maintenant $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$:
On pose $Z = z^2$ l'équation devient $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ dont on connait les solutions d'après 1. :
$Z = -2 - 2i\sqrt{3}$ ou $Z = -2 + 2i\sqrt{3}$
soit $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$ ou $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$

D'autre part d'après la question 2. $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3}$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$
Cela nous donne donc 2 solutions de (E) : $1 + i\sqrt{3}$; $-1 - i\sqrt{3}$ or on vient de voir que si z est solution de (E) alors $\bar{z}$ aussi, ce qui nous donne 2 autres solutions : $\overline{1 + i\sqrt{3}}$; $\overline{-1 - i\sqrt{3}}$ soit $1 - i\sqrt{3}$; $-1 + i\sqrt{3}$.
On vient de trouver 4 solutions de (E) qui n'en admet qu'au plus 4 d'après l'énoncé.

<u>**Conclusion**</u> : $S = \{1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$