Bac S 2015 – Métropole - Correction épreuve de mathématiques.

Exercice 2 : 3 points – Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1cm, on considère les points $A(0; -1; 5)$, $B(2; -1; 5)$, $C(11; 0; 1)$, $D(11; 4; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
A l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t ont pour coordonnées : $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0{,}8t; 1 + 0{,}6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1°)

a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b) La droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan P.

c) Vérifier que la droite (AB), orthogonales au plan P, coupe ce plan au point $E(11; -1; 5)$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2°)

a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$

b) A quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

CORRECTION

1°)

a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes $(OI), (OJ)$ ou (OK). Lequel ?

On a $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}2\\0\\0\end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{OI}$, ainsi la droite (AB) est parallèle à l'axe (OI).

b) La droite (CD) se trouve dans un plan P parallèle à l'un des plans $(OIJ), (OIK)$ ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan P.

On a $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}0\\4\\3\end{vmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{OJ}+3\overrightarrow{OK}$ ce qui prouve que (CD) est parallèle au plan (OJK).

Le plan (OJK) admet pour vecteur normal $\overrightarrow{OI}\begin{vmatrix}1\\0\\0\end{vmatrix}$ et passe par le point O une équation cartésienne du plan (OJK) est donc $x=0$.
Le plan P qui lui est parallèle admet donc une équation cartésienne du type $x=k$ avec k une constante à déterminer. Or $C(11;0;1)$ et $D(11;4;4)$ donc $k=11$.

Ainsi P admet comme équation cartésienne : $x=11$

c) Vérifier que la droite (AB), orthogonales au plan P, coupe ce plan au point $E(11;-1;5)$.

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\in(AB)\cap P \Leftrightarrow \begin{cases} il\ existe\ k\in\mathbb{R}\ tel\ que\ \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\\ x=11\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y+1=0\\z-5=0\\x=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\\y=-1\\z=5\\x=11\end{cases}$. **Conclusion** : La droite (AB) coupe le plan P au point $E(11;-1;5)$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

D'après b) la droite (AB) coupe le plan P (qui contient la droite (CD)) en E.
Si (AB) et (CD) sont sécantes alors leur point d'intersection est E.
On sait déjà que $E\in(AB)$ déterminons si le point E appartient à la droite (CD) :
k
tel que $\overrightarrow{CE}=k\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\-1=4k\\4=3k\end{cases}$ impossible. Donc (AB) et (CD) ne sont pas sécantes

2°)

a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$

On sait que $M_t(t; -1; 5)$ et $N_t(11; 0{,}8t; 1 + 0{,}6t)$ donc

$M_tN_t^2 = (11 - t)^2 + (0{,}8t + 1)^2 + (1 + 0{,}6t - 5)^2 = (11 - t)^2 + (0{,}8t + 1)^2 + (0{,}6t - 4)^2$
$= 121 - 22t + t^2 + 0{,}64t^2 + 1 + 1{,}6t + 0{,}36t^2 - 4{,}8t + 16$
$= 2t^2 - 25{,}2t + 138$

b) A quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $(t) = 2t^2 - 25{,}2t + 138$. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a :
Pour tout $t \in [0; +\infty[\ f'(t) = 4t - 25{,}2$ qui s'annule en 6,3.
Ainsi f est décroissante sur $[0; 6{,}3]$ et croissante sur $[6{,}3; +\infty[$, elle atteint son minimum en $t = 6{,}3$.

Conclusion : la longueur M_tN_t est minimale lorsque $t = 6{,}3$.