Bac S 2015 – Métropole - Correction épreuve de mathématiques.

Exercice 1 : 6 points – Commun à tous les candidats
Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1 :

1°) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

d) Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.
e) Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$

2°) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.
a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$

b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$

Partie 2

Une chaîne de magasin souhaite fidéliser ses clients en offrants des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.
Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.
Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.
De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1°) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2°) Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.
Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3°) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30€.
Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

CORRECTION

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1 :

1°) Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

D'après le cours,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

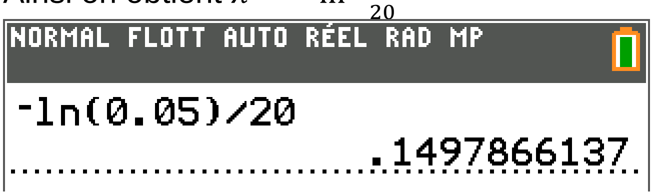
b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - P(0 \leq X \leq 20) = 1 - \left(e^{-0} - e^{-20\lambda}\right)$ d'après a)

Ainsi $P(X > 20) = e^{-20\lambda}$ d'après a)

Cherchons λ tel que $P(X > 20) = 0{,}05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0{,}05 \Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0{,}05)$ car les deux membres sont positifs stricts.

Ainsi on obtient $\lambda = -\ln\frac{(0{,}05)}{20}$



Ce qui nous donne $\lambda = 0{,}150$ à 10^{-3} près.

c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

D'après le cours $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 6{,}676$ à 10^{-3} près.

```
1/(-ln(0.05)/20)
                    6.676164014
```

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0{,}15$.

d) Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

En utilisant le résultat du a) on obtient :

$$P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\times 0{,}15} - e^{-20\times 0{,}15}$$

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
e^(-10*0.15)-e^(-20*0.15)
                    .1733430918
```

Ainsi $P(10 \leq X \leq 20) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

e) Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$

$P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) = 1 - P(0 \leq X \leq 18) = 1 - (e^{-0} - e^{-18\times 0{,}15}) = e^{-18\times 0{,}15}$ d'après a)

Ainsi $P(X > 18) = 0{,}067$ à 10^{-3} près.

```
e^(-18*0.15)
                    .0672055127
```

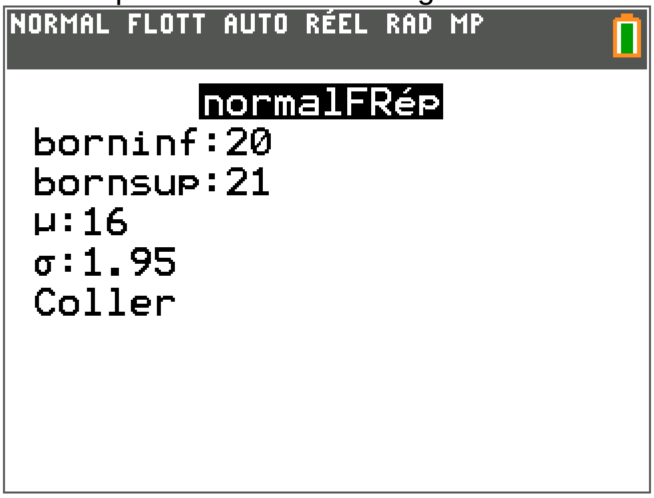
2°) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$

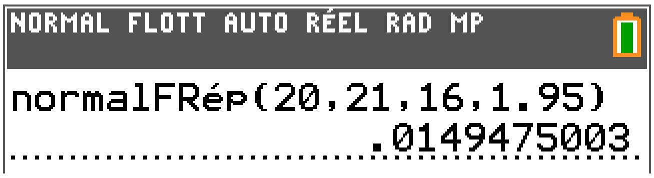
Utilisons la TI83 Premium pour effectuer ce calcul :

Appuyons sur 2nde var (distrib) puis choisissons 2:normalFRép(

On complète la boite de dialogue :



On obtient ainsi :



Conclusion : $P(20 \leq Y \leq 21) = 0{,}015$ à 10^{-3} près.

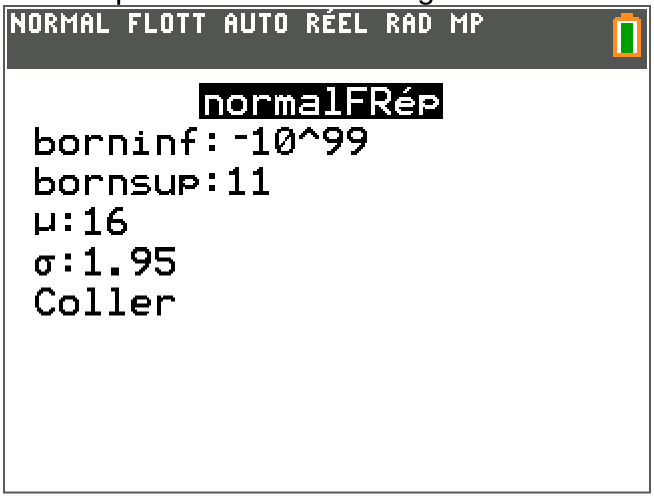
b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$

$$P(Y < 11) \cup (Y > 21) = P(Y < 11) + P(Y > 21)$$

Calculons $P(Y < 11)$ en utilisant notre TI83 Premium :

Appuyons sur 2nde var (distrib) puis choisissons 2:normalFRép(

On complète la boite de dialogue :



On obtient ainsi :

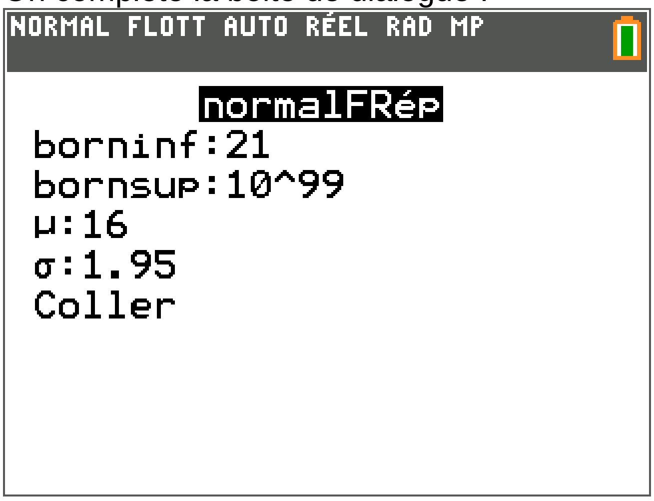
Ce qui nous donne : $P(Y < 11) = 0{,}005$ à 10^{-3} près.

Calculons $P(Y > 21)$ en utilisant notre TI83 Premium :

Appuyons sur 

puis choisissons 2:normalFRép(

On complète la boite de dialogue :



On obtient ainsi :

```
normalFRép(21,10^99,16,1.95
                  .0051721758
```

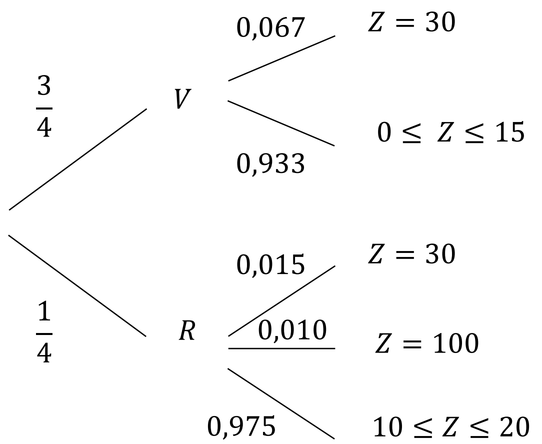
Ce qui nous donne : $P(Y > 21) = 0{,}005$ à 10^{-3} près.

Ainsi $P(Y < 11) \cup (Y > 21) = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}010$ à 10^{-3} près.

Partie 2

1°) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

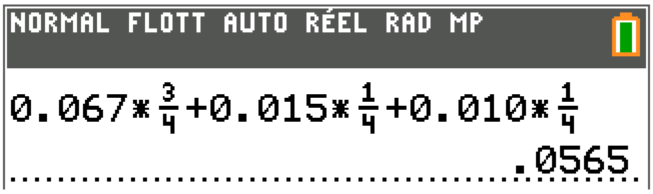
Soit Z la variable aléatoire qui correspond à la valeur du bon d'achat.
Notons R l'événement « Le bon d'achat est rouge » et V : « le bon d'achat est vert ».
D'après l'énoncé on peut construire l'arbre suivant :



Ainsi $P_R(Z \geq 30) = P_R(Z = 30) + P_R(Z = 100) = 0{,}025$

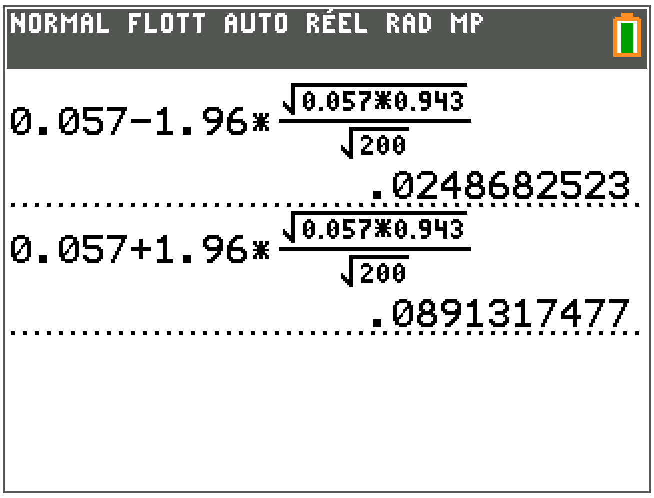
2°) Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.
Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

Ainsi d'après l'arbre $P(Z \geq 30) = 0{,}067 \times \frac{3}{4} + 0{,}015 \times \frac{1}{4} + 0{,}010 \times \frac{1}{4} = 0{,}057$ à 10^{-3} près.



3°) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30€.
Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.
Ses doutes sont-ils justifiés ?

Soit X' la variable aléatoire corespondant au nombre de de bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30€ sur ces 200 clients.
X' suit une loi binomaile de paramètre $n = 200$ et $p = 0{,}057$.
Dans notre échantillon, nous avons $f = \frac{6}{200} = 0{,}03$.
D'après le cours, l'intervalle de fluctuation de X' au niveau de confiance de 95% est :
$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}024; 0{,}090]$ à 10^{-3} près



$f = 0{,}03$ appartient bien à cet intervalle, les doutes du directeur du magasin ne sont pas justifiés.