EXERCICE 2 **6 points**

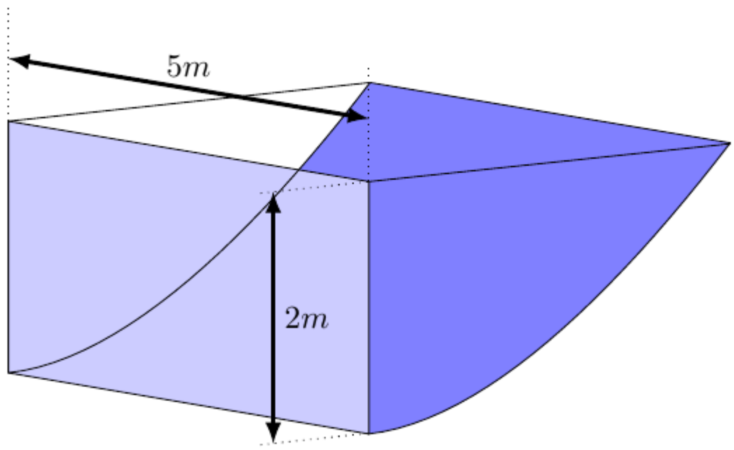
Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant:

- elle doit être située à deux mètres de sa maison;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres;
- elle doit mesurer cinq mètres de long;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.

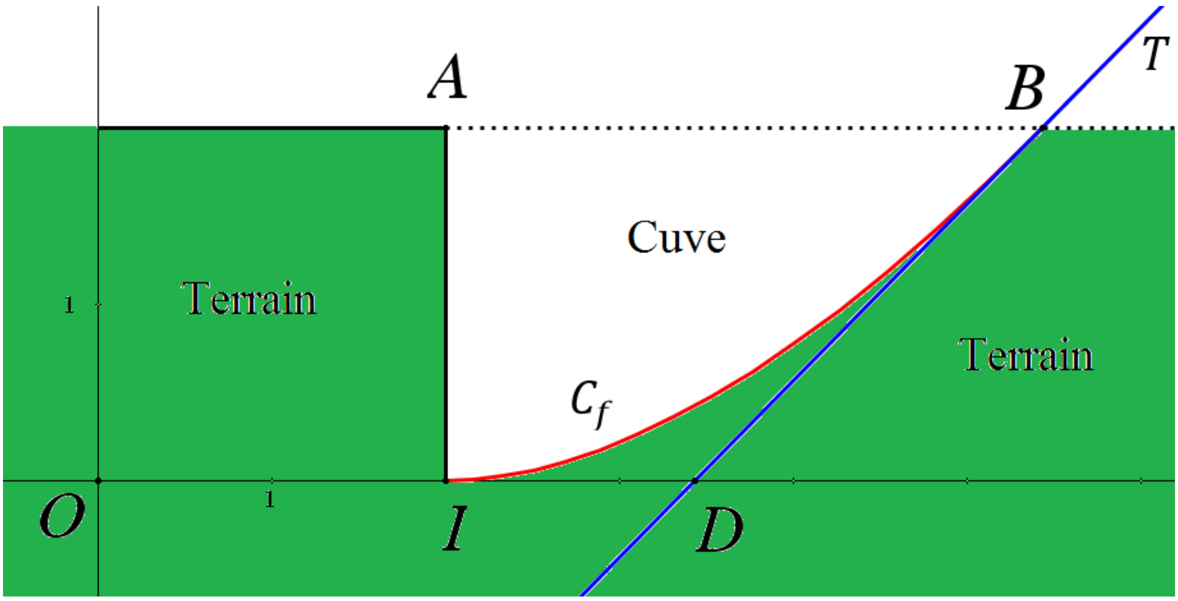


La partie incurvée est modélisée par la courbe C_f de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$$

La courbe C_f est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2; 2)$, $I(2; 0)$ et $B(2e; 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

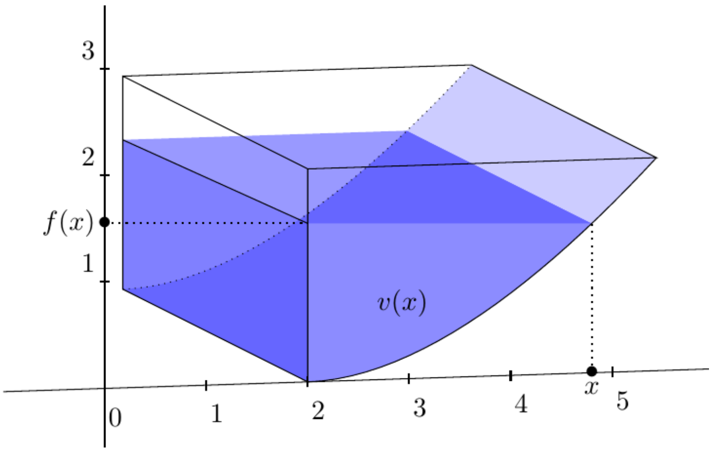
1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe C_f et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe C_f au point I.

2. On note T la tangente à la courbe C_f au point B, et D le point d'intersection de la droite T avec l'axe des abscisses.
   a) Déterminer une équation de la droite T et en déduire les coordonnées de D.
   b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe C_f les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$. S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire?
3. a) Montrer que, sur l'intervalle $[2; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
   b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$.
   c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$,

$$v(x) = 5\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right)$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre?
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :    a est un réel
               b est un réel
Traitement :   a prend la valeur 2
               b prend la valeur 2e
               Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire:
               |  c prend la valeur (a+b)/2
               |  Si v(c) < V/2, alors:
               |  |  a prend la valeur c
               |  Sinon
               |  |  b prend la valeur c
               |  Fin Si
               Fin Tant que
Sortie:        Afficher f(c)
```

CORRECTION

EXERCICE 2 **6 points**

Partie A

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe C_f et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe C_f au point I.

On a $f(x_B) = f(2e) = 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e\ln e - 2e + 2 = 2e \times 1 - 2e + 2 = 2 = y_B$, donc $\boldsymbol{B \in C_f}$.
D'autre part $f(x_I) = f(2) = 2\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 2\ln 1 = 2 \times 0 = 0 = y_I$, donc $\boldsymbol{I \in C_f}$.
Pour montrer que l'axe des abscisses est tangent à la courbe C_f au point I d'abscisse 2, on va montrer que $f'(2) = 0$. Montrons tout d'abord que f est dérivable sur $[2; 2e]$:

La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $[2; 2e]$ car c'est une fonction polynôme, de plus elle est positive stricte, donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $[2; 2e]$.
Par produit, la fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $[2; 2e]$.
Or la fonction $x \mapsto -x + 2$ est dérivable sur $[2; 2e]$ car c'est une fonction polynôme donc par somme, f est dérivable sur $[2; 2e]$ et on a :
$\forall x \in [2; 2e]\ f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
Or $f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln 1$. Donc **$f'(2) = 0$, ce qui prouve bien que l'axe des abscisses est tangent à la courbe C_f au point I**.

---

2. a) Déterminer une équation de la droite T et en déduire les coordonnées de D.

D'après le cours, l'équation de T est de la forme $y = f'(x_B)(x - x_B) + f(x_B)$
$\Leftrightarrow y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$
Calculons $f'(2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln e = 1$ et $f(2e) = 2$ (vu dans 1.)
Ainsi $T : y = 1 \times (x - 2e) + 2$ et donc $\boldsymbol{T : y = x - 2e + 2}$
D est la point de T qui a pour ordonnée 0 ainsi $0 = x_D - 2e + 2 \Leftrightarrow x_D = 2e - 2$. Donc $\boldsymbol{D(2e - 2; 0)}$

---

2. b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe C_f les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2e$. S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$. Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire?

Le triangle ABI est rectangle en A, son aire est donc $A_1 = \frac{1}{2} \times AI \times AB = \frac{1}{2} \times 2 \times (2e - 2)$

Ainsi $\boldsymbol{A_1 = 2e - 2\ cm^2}$

L'aire du trapèze $ABDI$ est $A_2 = AI \times \frac{ID+AB}{2} = 2 \times \frac{(2e-4)+(2e-2)}{2}$ d'où $\boldsymbol{A_2 = 4e - 6\ cm^2}$

On obtient l'encadrement : $\boldsymbol{2e - 2 \leq S \leq 4e - 6}$

La cuve faisant $5m$ de profondeur, on obtient l'encadrement de son volume V :

$$5(2e - 2) \leq V \leq 5(4e - 6) \Leftrightarrow \boldsymbol{10e - 10 \leq V \leq 20e - 24}$$

---

3. a) Montrer que, sur l'intervalle $[2; 2e]$, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $[2; 2e]$ car c'est une fonction polynôme. On a déjà vu que la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $[2; 2e]$.

Par produit, la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $[2; 2e]$.

Par somme, G est dérivable sur $[2; 2e]$ et on a :

$\forall x \in [2; 2e]\ G'(x) = \frac{2x}{2} \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} - \frac{2x}{4} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$

soit $\boldsymbol{G'(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$, ce qui prouve que **$G$ est bien une primitive de g sur $[2; 2e]$.**

---

3 b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$.

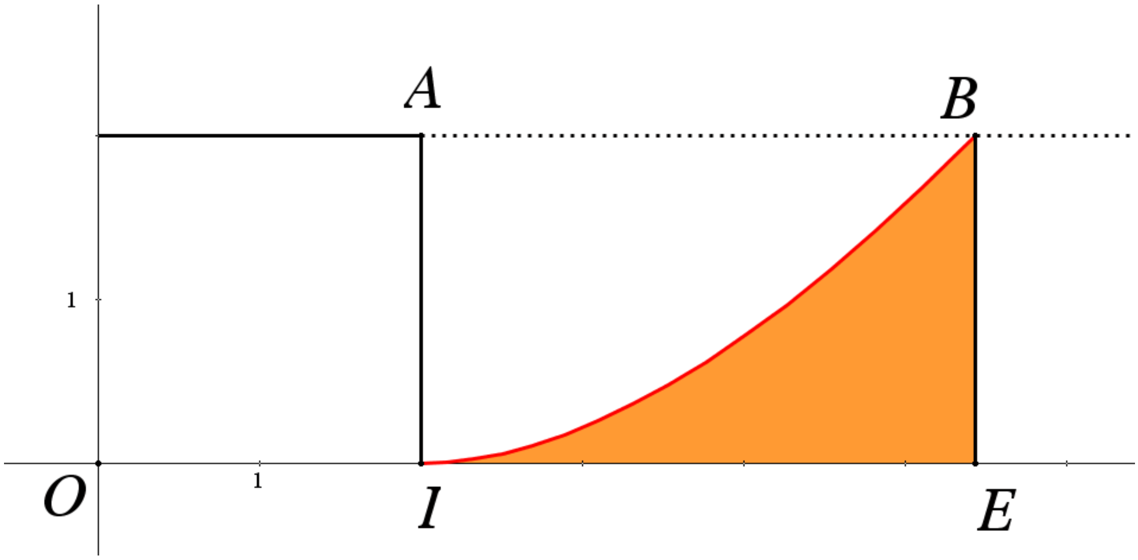
Pour tout $x \in [2; 2e]$ on a $f(x) = g(x) - x + 2$ donc $F(x) = G(x) - \frac{x^2}{2} + 2x + C$, on prendra $C = 0$ ce qui nous donne : $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$

$\forall x \in [2; 2e]$ **$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$ est une primitive de f sur $[2; 2e]$.**

---

3 c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Déterminons l'aire du la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 2$ et $x = 2e$, l'axe des abscisses et C_f, que nous avons représenté en orange ci-dessous :



Cette aire vaut

$$A = \int_{2}^{2e} f(x)dx = F(2e) - F(2)$$

Or $F(2e) = \frac{(2e)^2}{2}\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - \frac{3(2e)^2}{4} + 2 \times 2e = 2e^2 \ln e - 3e^2 + 4e = 2e^2 - 3e^2 + 4e = -e^2 + 4e$

$F(2) = \frac{2^2}{2}\ln\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{3(2)^2}{4} + 2 \times 2 = 2 \times 0 - 3 + 4 = 1$.

Ainsi $A = F(2e) - F(2) = -e^2 + 4e - 1$

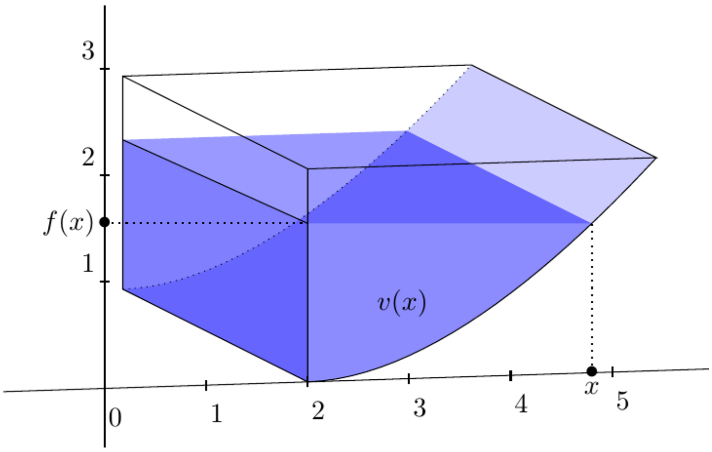
On en déduit que $S = AI \times AB - A = 2(2e - 2) - A = 4e - 4 + e^2 - 4e + 1$

Donc $\boldsymbol{S = e^2 - 3\ m^2}$ et ainsi $V = 5S$ soit $\boldsymbol{V = 5e^2 - 15\ m^3 \approx 22m^3}$

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$,

$$v(x) = 5\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right)$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre?

Lorsque le niveau de l'eau atteint $1m$ alors $f(x) = 1$.
Recherchons $\alpha \in [2; 2e]$ tel que $f(\alpha) = 1$:

On sait d'après la question A.1. que f est dérivable sur $[2\,;2e]$ et que pour tout $x \in [2\,;2e]$

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or $x \geq 2$ donc $\frac{x}{2} \geq 1$ et donc $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ d'après le cours. On obtient le tableau de variation suivant :

x	2		$2e$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

D'après le tableau de variation, f est strictement croissante et continue sur $[2; 2e]$ à valeur dans $[0; 2]$. Or $1 \in [0; 2]$ donc d'après le théorème de la bijection, appelé aussi corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [2; 2e]$ tel que $f(\alpha) = 1$.

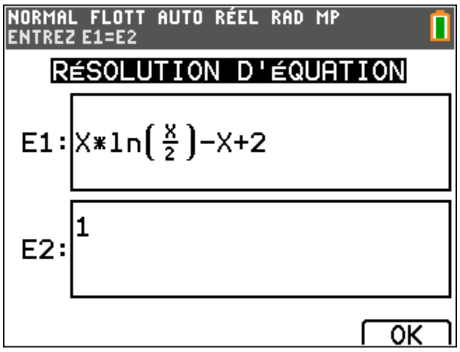
Recherchons la valeur de α à l'aide de notre TI83 Premium CE à l'aide de l'application **Résoudre** :

On appuis sur  et on choisit **Résoudre** :

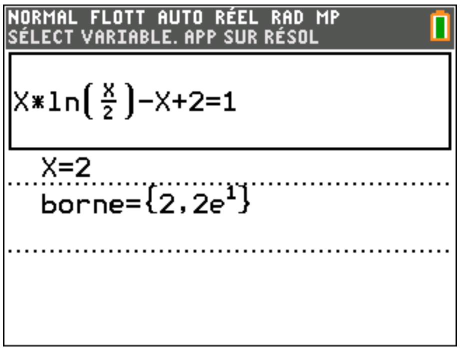
On entre dans **E1** le membre de gauche de l'équation :

$$x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-x+2$$

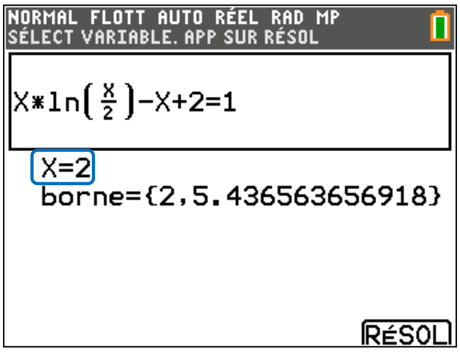
Puis **E2**, le membre de droite on entre 1 :
On valide en appuyant sur OK



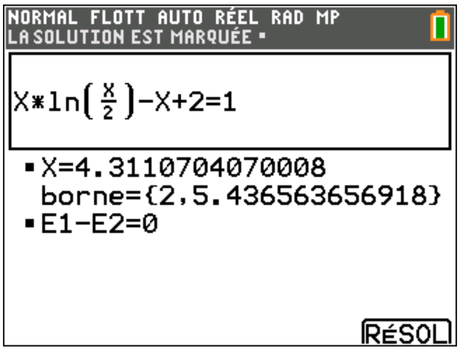
Il faut entrer les bornes qui correspondent à l'ensemble de définition de la fonction :



Puis on entre la valeur initiale (il y a un solution unique donc on entre n'importe quelle valeur de l'intervalle $[2; 2e]$, ici on a choisit 2)

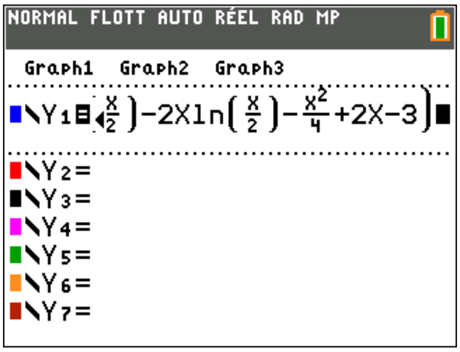


Puis on appuie sur RÉSOL pour obtenir la solution :

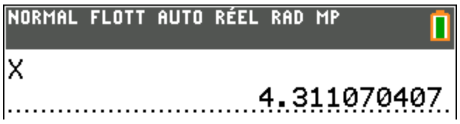


On obtient ainsi $\boldsymbol{\alpha \approx 4,311}$. Il faut maintenant calculer $v(\alpha)$:

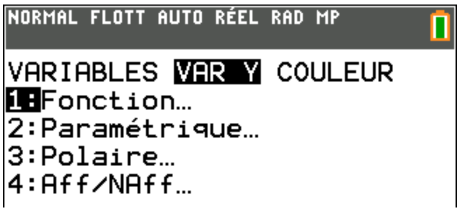
On quitte l'application en appuyant sur 2nde mode (quitter) et on entre la fonction v dans l'éditeur de fonctions en appuyant sur f(x) (graph stats f1)



On quitte l'éditeur de fonctions en appuyant sur 2nde mode (quitter). On peut vérifier que X est enregistré en mémoire en appuyant sur X :

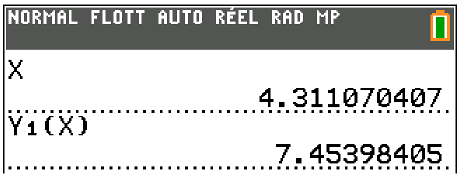


Calculons $v(x)$:
Pour récupérer Y_1 correspondant à notre fonction on appuie sur var (distrib) puis on sélectionne l'onglet **VAR Y** : puis **Fonction**.



On choisit la fonction dans laquelle nous avons entré l'expression de $f(x)$, ici Y_1 :

On entre enfin $Y_1(X)$ qui correspond à $v(\alpha)$:



Ainsi lorsque le niveau de l'eau est de $1m$ le **volume de l'eau est de $7m^3$** environ.

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :    a est un réel
               b est un réel
Traitement :   a prend la valeur 2
               b prend la valeur 2e
               Tant que v(b) − v(a) > 10^(−3) faire:
                 | c prend la valeur (a+b)/2
                 | Si v(c) < V/2, alors:
                 |   | a prend la valeur c
                 | Sinon
                 |   | b prend la valeur c
                 | Fin Si
               Fin Tant que
Sortie:        Afficher f(c)
```

On reconnait un algorithme de type « dichotomie » qui s'arrête lorsqu'il a trouvé des valeurs de a et b tels que $v(a) < \frac{V}{2} \leq v(b)$ avec $v(b) - v(a) \leq 10^{-3}$.

La dernière valeur calculée de c est donc une valeur approché telle que $v(c) \approx \frac{V}{2}$ à 10^{-3} près.

Puis l'algorithme affiche $f(c)$ qui **correspond au niveau de l'eau pour laquelle la cuve en remplie à moitié**.