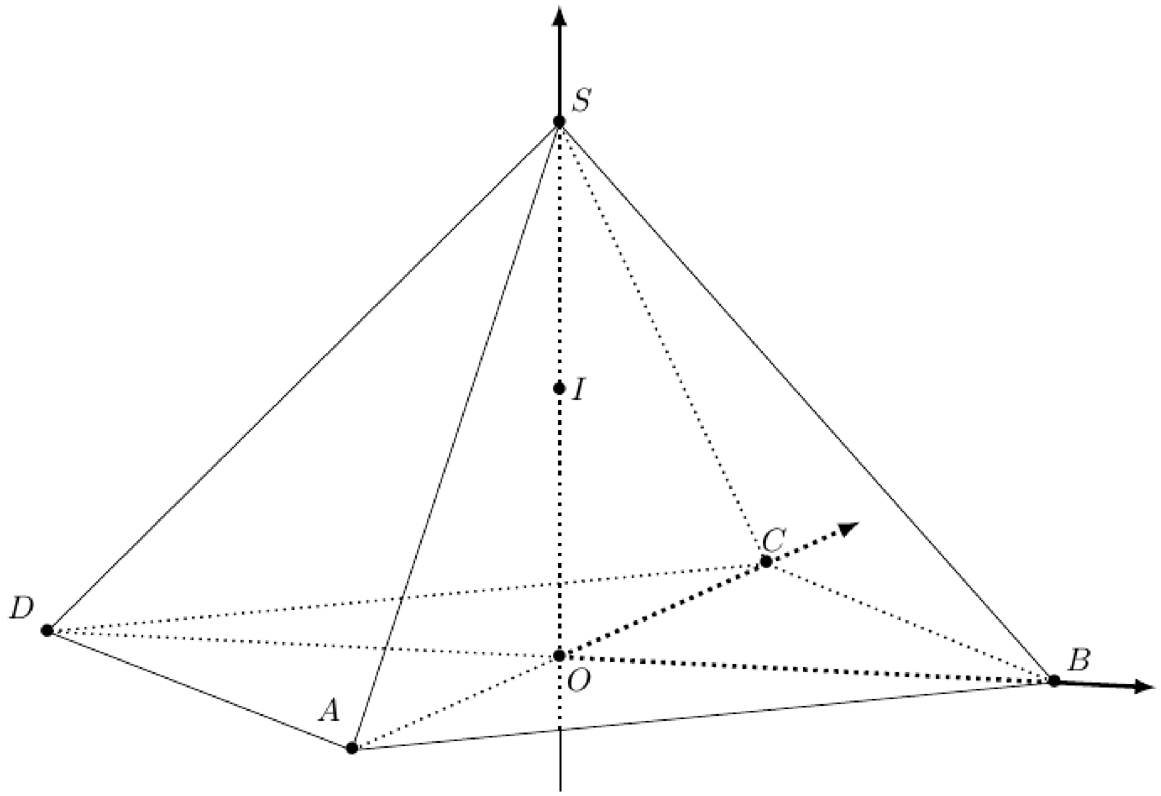
EXERCICE 4 : **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$ est orthonormé.
   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.
2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.
   a) Déterminer les coordonnées du point K.
   b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   d) Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$.
   a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   b) Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
   c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

CORRECTION

EXERCICE 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Justifier que le repère $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$ est orthonormé.

$ABCD$ est un carré de centre O donc $OA^2+OB^2=AB^2 \Leftrightarrow 1^2+1^2=AB^2 \Leftrightarrow AB=\sqrt{2}$.

La pyramide étant formée de triangles équilatéraux, $BS=AB=\sqrt{2}$.

D'autre part, $[SO]$ est la hauteur de la pyramide, ainsi le triangle SOB est rectanle en O. Donc d'après le théorème de Pythagore, $SO^2+OB^2=BS^2 \Leftrightarrow SO^2+1=2 \Leftrightarrow SO=1$.
On a donc $OB=OC=OS=1$ et $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont orthogonaux deux à deux, ce qui fait que $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$ est un repère orthonormé de l'espace.

---

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

Dans le repère $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$ on a $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

On pose $K\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et la relation $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ devient $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\times(-1)\\ y=\frac{1}{3}\times 0\\ z-1=\frac{1}{3}\times(-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\ y=0\\ z=\frac{2}{3}\end{cases}$

Conclusion : $K\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

---

2. b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

On a $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $K\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ on remarque donc que $\overrightarrow{BI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BK}$ ce qui prouve que les points B, I et K sont alignés.

***2. c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.***

Soit L_1 le point tel que $\overrightarrow{SL_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$. Par symétrie et d'après la question précédente, on a :
$\overrightarrow{CI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CL_1}$ ce qui prouve que les points C, I et L_1 sont alignés, soit $L_1 \in (IC) \Rightarrow L_1 \in (BCI)$ or S, L_1 et A sont alignés donc
$L_1 \in (BCI) \cap (AS)$ ce qui prouve que $L_1 = L$.

On a $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ d'où $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ce qui prouve que **(LK) et (AD) sont parallèles**.

---

2. d) Déterminer les coordonnées du point L.

On a vu que L est le point tel que $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$. On a $S\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

On pose $L\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$la relation $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$ devient $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\times 0 \\ y = \frac{1}{3}\times(-1) \\ z-1 = \frac{1}{3}\times(-1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3}\end{cases}$, donc $\boldsymbol{L\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}}$.

---

3. a) Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

$B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ainsi $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}.\overrightarrow{BC} = 1\times(-1) + 1\times 1 + 2\times 0 = 0$
et $\vec{n}.\overrightarrow{BI} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 2\times\frac{1}{2} = 0$.
$\vec{n}$ est orthogonal à 2 vecteurs de (BCI) non colinéaires, ce qui prouve que **$\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (BCI).**

---

3. b) Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, on remarque donc que $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$, ce qui prouve que **$\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires**.

3. c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

D'après 3.b $\vec{n}$ est un vecteur ayant la même direction que (SAD), de plus c'est un vecteur normal à (BCI) d'après 3.a, donc les plans **(BCI) et (SAD) sont perpendiculaires.**
On a vu dans 2.b. que $(BCI) \cap (SD) = \{K\}$ et $(BCI) \cap (SA) = \{L\}$ dans 2.c. ce qui prouve que **(BCI) et (SAD) sont sécants en (KL).**